Étude graphique des fonctions, classe de seconde

F.Gaudon

6 juin 2010

Table des matières

1 Croissance, décroissance **2**

2 Maximum, minimum **3**

3 Résolutions graphiques d'inéquations et signe d'une fonction **3**

3.1 Compléments sur les intervalles 3

3.2 Résolution graphique d'inéquations 4

3.3 Signe d'une fonction 5

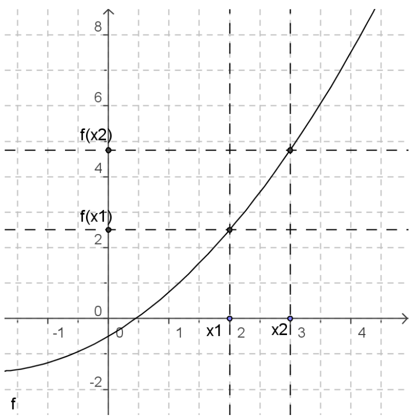
1 Croissance, décroissance

Définition :

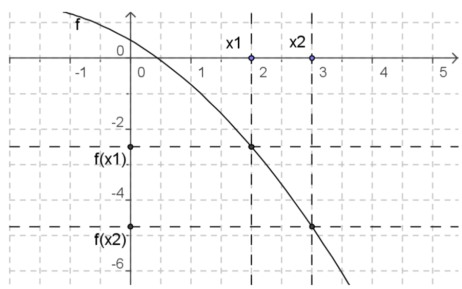
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est dite *croissante* sur l'intervalle I lorsque, si x augmente dans I, alors $f(x)$ augmente.
- La fonction f est dite *décroissante* sur l'intervalle I lorsque, si x augmente dans I, alors $f(x)$ diminue.
- La fonction f est dite *monotone* sur l'intervalle I lorsqu'elle est croissante sur I, ou lorsqu'elle est décroissante sur I.

Fonction croissante



Fonction décroissante

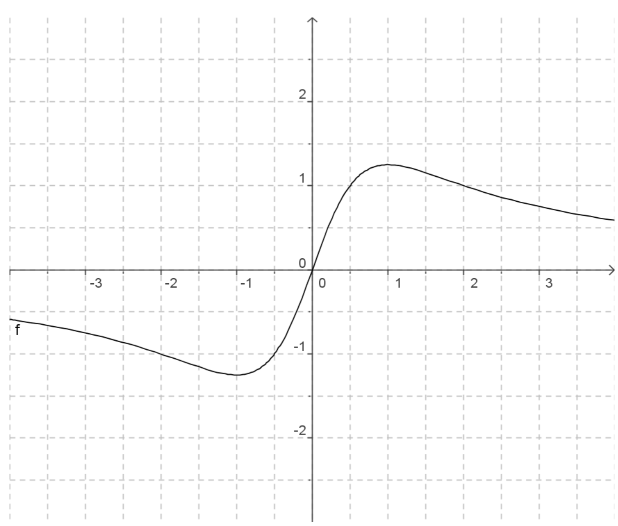


Synthèse :

Pour résumer les variations d'une fonction f on utilise un *tableau de variations* dans lequel apparaissent les intervalles sur lesquels la fonction est monotone.

Exemple :

On considère la fonction f suivante définie sur $[-4; 4]$ dont la représentation graphique est la suivante :



La fonction semble, d'après la représentation graphique, admettre le tableau de variation suivant :

x	-4		-1		1		4
$f(x)$	-0,6	↘	$-1,25$	↗	1,25	↘	0,6

2 Maximum, minimum

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de l'intervalle I.

- La fonction f admet un *maximum* M en x_0 sur l'intervalle I lorsque $M = f(x_0)$ et pour tout nombre x de I $f(x) \leq M$.
- La fonction f admet un *minimum* m en x_0 sur l'intervalle I lorsque $m = f(x_0)$ et pour tout nombre x de I $f(x) \geq m$ avec $m = f(x_0)$.
- On dit que la fonction f admet un *extremum* sur I si elle admet un maximum ou un minimum.

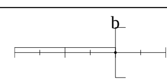
3 Résolutions graphiques d'inéquations et signe d'une fonction

3.1 Compléments sur les intervalles

Définitions :

Soient a et b deux nombres réels avec a inférieur strictement à b.

- $[a; +\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x \geq a$.
- $]-\infty; a[$ est l'ensemble des réels x tels que $x < a$.

$]-\infty; b[$	

Définition :

Soient I et J deux intervalles.

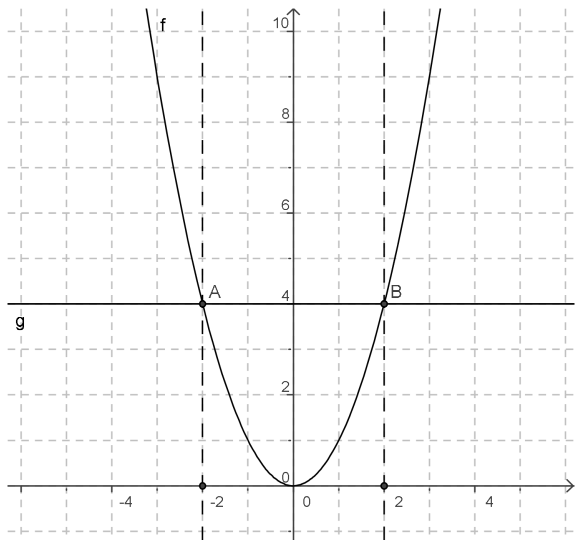
- *L'intersection* de I et J notée $I \cap J$ est l'ensemble des nombres appartenant à la fois à I et à J.
- *La réunion* de I et J notée $I \cup J$ est l'ensemble des nombres appartenant à I ou (inclusif) à J.
- Lorsque les intervalles I et J n'ont aucun point commun, leur intersection est *l'ensemble vide* noté $\emptyset$. On dit aussi que les intervalles sont *disjoints*.

3.2 Résolution graphique d'inéquations

Propriété :

Soit k un nombre réel, f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère. Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq k$ (respectivement $f(x) \geq k$) sont les abscisses des points de la courbe situés en dessous (respectivement au dessus) de la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $(0; k)$.

Exemple :
Sur la figure ci-contre, est représentée la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

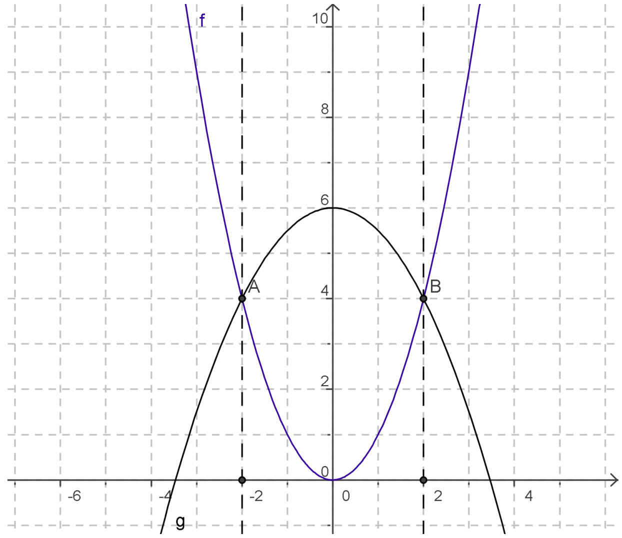


L'inéquation $f(x) \leq 4$ a pour ensemble solution $[-2; 2]$.
L'inéquation $f(x) \geq 4$ a pour ensemble solution $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$.

Propriété :

Soient f et g deux fonctions et $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur représentation graphique dans un repère. Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés en dessous des points de $\mathcal{C}_g$ de même abscisse.

Exemple :
Les courbes ci-contre sont les représentations graphiques des fonctions f et g définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6$.



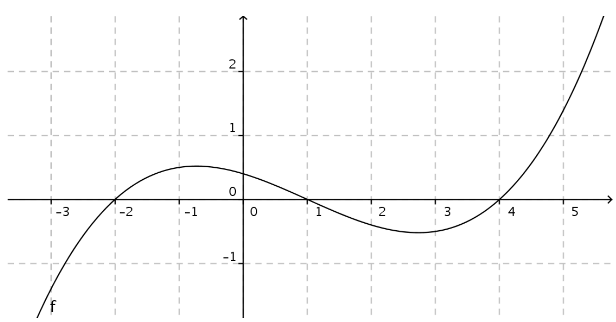
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est l'ensemble $]-2;2[$.

3.3 Signe d'une fonction

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est :
- *positive* sur I si pour tout réel x de I, $f(x) \geq 0$;
- *négative* sur I si pour tout réel x de I, $f(x) \leq 0$.

Exemple :



Pour visualiser le signe d'une fonction, on utilise un *tableau de signes* :

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f(x)$		-	0	$+$	0	-	0	$+$	