Étude algébrique de fonctions, classe de 2nde

Une approche graphique ne suffit pas pour connaître les variations d'une fonction. Pour se convaincre des limites d'une approche graphique, on pourra faire tracer la fonction f définie par $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{1000}$ sur $[-5; 5]$ puis sur d'autres intervalles...

1 Inégalités

Propriété :

Soient a et b deux nombres réels, alors :
- $a \leq b$ si et seulement si ....
- $a \geq b$ si et seulemet si ....

Propriétés :

Soient a, b, c trois nombres réels :
- si $a \leq b$ alors .... c'est à dire que le sens de l'inégalité .... lorsque l'on ajoute le même nombre dans les deux membres ;
- si $a \leq b$ et $c > 0$ alors .... c'est à dire que le sens de l'inégalité .... lorsque l'on multiplie les deux membres de l'inégalité par un même nombre strictement positif ;
- si $a \leq b$ et $c < 0$ alors .... c'est à dire que le sens de l'inégalité .... lorsque l'on multiplie les deux membres de l'inégalité par le même nombre strictement négatif.

Exemple :
Soit f la fonction définie pour tou réel x par $f(x) = -2x + 3$. Si x est un réel tel que $x > 5$ alors $2x$.................. c'est à dire $-2x$.......... et $-2x + 3$.............. donc $-2x + 3$........... c'est à dire $f(x)$.............

2 Approche algébrique des variations des fonctions

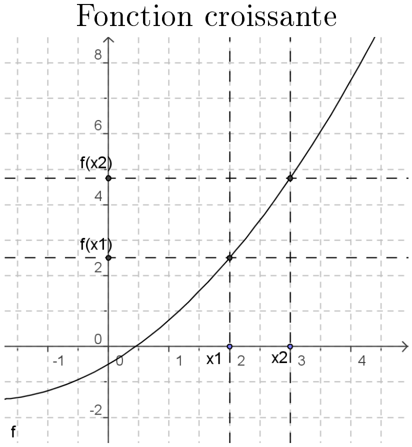
2.1 Croissance, décroissance

Définition :

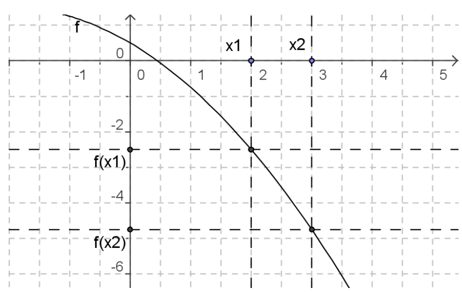
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est dite *croissante* sur l'intervalle I lorsque pour tous les nombres a et b de I, ... c'est à dire qu'appliquer la fonction ....
- La fonction f est dite *décroissante* sur l'intervalle I lorsque pour tous les nombres a et b de I, ... c'est à dire qu'appliquer la fonction ....
- La fonction f est dite *constante* sur l'intervalle I lorsqu'il existe un nombre réel y tel que pour tout nombre x de I, ...

Fonction croissante



Fonction décroissante



Exemple d'étude en utilisant des inégalités :

Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x+3$. Pour étudier ses variations l'intervalle $\mathbb{R}$, soient x et x' deux réels tels que $x \leq x'$. On va étudier si appliquer la fonction à x et x' change ou ne change pas le sens de l'inégalité.
D'après les règles sur les inégalités, -2 étant négatif on a donc $-2x$......... $-2x'$ et $-2x+3$.......... $-2x'+3$ c'est à dire $f(x)$..........$f(x')$. La fonction f a donc changé le sens de l'inégalité, elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

2.2 Maximum, minimum

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- La fonction f admet un maximum M en x_0 sur l'intervalle I lorsque pour tout nombre x de I, ... et ....
- La fonction f admet un minimum m en x_0 sur l'intervalle I lorsque pour tout nombre x de I, ... et ....

Exemple :
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(x) = -3x + 2$. Montrons que 2 est un maximum pour la fonction f sur $[0; 10]$. On a d'abord $f(0) =$ .... En outre, pour tout réel x de l'intervalle, $f(x) - 2 =$ .... Or si x est positif, alors .... est négatif donc $f(x) - 2$........0 ce qui montre que $f(x)$........2 et donc que 2 est un maximum pour la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.