Étude algébrique des fonctions

Étude algébrique de fonctions, classe de seconde

F.Gaudon

http://mathsfg.net.free.fr

9 avril 2012

Une approche graphique ne suffit pas pour connaître les variations d'une fonction. Pour se convaincre des limites d'une approche graphique, on pourra faire tracer la fonction f définie par $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{1000}$ sur $[-5; 5]$ puis sur d'autres intervalles...

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f admet un *maximum* M en un réel x_0 de l'intervalle I lorsque :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f admet un *maximum* M en un réel x_0 de l'intervalle I lorsque :

  pour tout nombre x de I, $f(x) - M \leq 0$

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f admet un *maximum* M en un réel x_0 de l'intervalle I lorsque :

  pour tout nombre x de I, $f(x) - M \leq 0$
  et $M = f(x_0)$.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f admet un *maximum* M en un réel x_0 de l'intervalle I lorsque :

  pour tout nombre x de I, $f(x) - M \leq 0$
  et $M = f(x_0)$.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f admet un *maximum* M en un réel x_0 de l'intervalle I lorsque :

  pour tout nombre x de I, $f(x) - M \leq 0$
  et $M = f(x_0)$.

- La fonction f admet un *minimum* m en un réel x_0 de l'intervalle I lorsque :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f admet un *maximum* M en un réel x_0 de l'intervalle I lorsque :

  pour tout nombre x de I, $f(x) - M \leq 0$
  et $M = f(x_0)$.
- La fonction f admet un *minimum* m en un réel x_0 de l'intervalle I lorsque :

  pour tout nombre x de I, $f(x) - m \geq 0$;

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f admet un *maximum* M en un réel x_0 de l'intervalle I lorsque :

  pour tout nombre x de I, $f(x) - M \leq 0$
  et $M = f(x_0)$.

- La fonction f admet un *minimum* m en un réel x_0 de l'intervalle I lorsque :

  pour tout nombre x de I, $f(x) - m \geq 0$;
  et $m = f(x_0)$.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f admet un *maximum* M en un réel x_0 de l'intervalle I lorsque :

  pour tout nombre x de I, $f(x) - M \leq 0$
  et $M = f(x_0)$.

- La fonction f admet un *minimum* m en un réel x_0 de l'intervalle I lorsque :

  pour tout nombre x de I, $f(x) - m \geq 0$;
  et $m = f(x_0)$.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $f(x) = -3x^2 + 2$.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;10]$ par
$f(x) = -3x^2 + 2$.
Montrons que 2 est un maximum pour la fonction f sur $[0;10]$.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par
$f(x) = -3x^2 + 2$.
Montrons que 2 est un maximum pour la fonction f sur $[0; 10]$.
On a d'abord $f(0) = 2$.

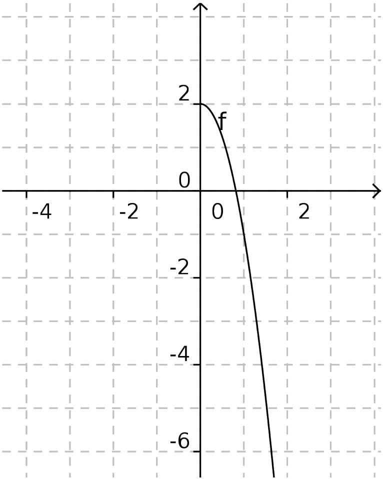
Exemple :
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par
$f(x) = -3x^2 + 2$.
Montrons que 2 est un maximum pour la fonction f sur $[0; 10]$.
On a d'abord $f(0) = 2$.
En outre, pour tout réel x de l'intervalle,
$f(x) - 2 = -3x^2 + 2 - 2 = -3x^2$.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par
$f(x) = -3x^2 + 2$.
Montrons que 2 est un maximum pour la fonction f sur $[0; 10]$.
On a d'abord $f(0) = 2$.
En outre, pour tout réel x de l'intervalle,
$f(x) - 2 = -3x^2 + 2 - 2 = -3x^2$.
Or si x est positif, alors $-3x^2$ est négatif.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par
$f(x) = -3x^2 + 2$.
Montrons que 2 est un maximum pour la fonction f sur $[0; 10]$.
On a d'abord $f(0) = 2$.
En outre, pour tout réel x de l'intervalle,
$f(x) - 2 = -3x^2 + 2 - 2 = -3x^2$.
Or si x est positif, alors $-3x^2$ est négatif.
Donc $f(x) - 2 \leq 0$.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;10]$ par
$f(x) = -3x^2 + 2$.
Montrons que 2 est un maximum pour la fonction f sur $[0;10]$.
On a d'abord $f(0) = 2$.
En outre, pour tout réel x de l'intervalle,
$f(x) - 2 = -3x^2 + 2 - 2 = -3x^2$.
Or si x est positif, alors $-3x^2$ est négatif.
Donc $f(x) - 2 \leq 0$.
Ce qui montre que $f(x) \leq 2$.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par
$f(x) = -3x^2 + 2$.
Montrons que 2 est un maximum pour la fonction f sur $[0; 10]$.
On a d'abord $f(0) = 2$.
En outre, pour tout réel x de l'intervalle,
$f(x) - 2 = -3x^2 + 2 - 2 = -3x^2$.
Or si x est positif, alors $-3x^2$ est négatif.
Donc $f(x) - 2 \leq 0$.
Ce qui montre que $f(x) \leq 2$.
D'où 2 est un maximum pour la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.


2
f
0
-4
-2
0
2
-2
-4
-6

Propriétés (rappels sur les propriétés des inégalités) :

Soient a, b, c trois nombres réels :

Propriétés (rappels sur les propriétés des inégalités) :

Soient a, b, c trois nombres réels :

- si $a \leq b$ alors

Propriétés (rappels sur les propriétés des inégalités) :

Soient a, b, c trois nombres réels :

- si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$,

Propriétés (rappels sur les propriétés des inégalités) :

Soient a, b, c trois nombres réels :

- si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$,
  c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas* lorsque l'*on ajoute le même nombre* dans les deux membres ;

Propriétés (rappels sur les propriétés des inégalités) :

Soient a, b, c trois nombres réels :

- si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$,
  c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas* lorsque l'*on ajoute le même nombre* dans les deux membres ;
- si $a \leq b$ et $c > 0$ alors

Propriétés (rappels sur les propriétés des inégalités) :

Soient a, b, c trois nombres réels :

- si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$,
  c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas* lorsque l'*on ajoute le même nombre* dans les deux membres ;
- si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$,

Propriétés (rappels sur les propriétés des inégalités) :

Soient a, b, c trois nombres réels :

- si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$,
  c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas* lorsque l'*on ajoute le même nombre* dans les deux membres ;
- si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$,
  c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas* lorsque l'on *multiplie les deux membres* de l'inégalité par un *même nombre strictement positif* ;

Propriétés (rappels sur les propriétés des inégalités) :

Soient a, b, c trois nombres réels :

- si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$,
  c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas* lorsque l'*on ajoute le même nombre* dans les deux membres ;
- si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$,
  c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas* lorsque l'on *multiplie les deux membres* de l'inégalité par un *même nombre strictement positif* ;
- si $a \leq b$ et $c < 0$

Propriétés (rappels sur les propriétés des inégalités) :

Soient a, b, c trois nombres réels :

- si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$,
  c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas* lorsque l'*on ajoute le même nombre* dans les deux membres ;
- si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$,
  c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas* lorsque l'on *multiplie les deux membres* de l'inégalité par un *même nombre strictement positif* ;
- si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $ac \geq bc$,

Propriétés (rappels sur les propriétés des inégalités) :

Soient a, b, c trois nombres réels :

- si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$,
  c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas* lorsque l'*on ajoute le même nombre* dans les deux membres ;
- si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$,
  c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas* lorsque l'on *multiplie les deux membres* de l'inégalité par un *même nombre strictement positif* ;
- si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $ac \geq bc$,
  c'est à dire que le sens de l'inégalité change lorsque l'on *multiplie les deux membres* de l'inégalité par le *même nombre strictement négatif*.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est dite *croissante* sur l'intervalle I lorsque

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est dite *croissante* sur l'intervalle I lorsque

  pour tous les nombres a et b de I tels que $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$,

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est dite *croissante* sur l'intervalle I lorsque

  pour tous les nombres a et b de I tels que $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$,
  c'est à dire qu'appliquer la fonction *ne change pas le sens des inégalités*.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est dite *croissante* sur l'intervalle I lorsque

  pour tous les nombres a et b de I tels que $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$,
  c'est à dire qu'appliquer la fonction *ne change pas le sens des inégalités*.

- La fonction f est dite *décroissante* sur l'intervalle I lorsque

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est dite *croissante* sur l'intervalle I lorsque

  pour tous les nombres a et b de I tels que $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$,
  c'est à dire qu'appliquer la fonction *ne change pas le sens des inégalités*.

- La fonction f est dite *décroissante* sur l'intervalle I lorsque

  pour tous les nombres a et b de I tels que $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$,

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est dite *croissante* sur l'intervalle I lorsque

  pour tous les nombres a et b de I tels que $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$,
  c'est à dire qu'appliquer la fonction *ne change pas le sens des inégalités*.

- La fonction f est dite *décroissante* sur l'intervalle I lorsque

  pour tous les nombres a et b de I tels que $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$,
  c'est à dire qu'appliquer la fonction *change le sens des inégalités*.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est dite *croissante* sur l'intervalle I lorsque

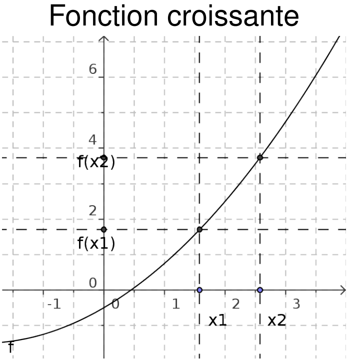
  pour tous les nombres a et b de I tels que $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$,
  c'est à dire qu'appliquer la fonction *ne change pas le sens des inégalités*.

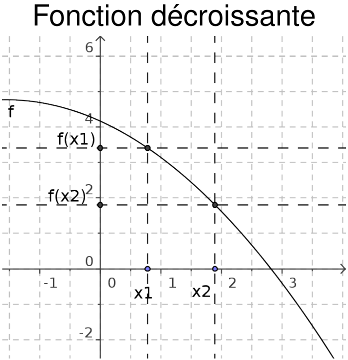
- La fonction f est dite *décroissante* sur l'intervalle I lorsque

  pour tous les nombres a et b de I tels que $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$,
  c'est à dire qu'appliquer la fonction *change le sens des inégalités*.

Fonction croissante

Fonction décroissante


Fonction croissante
6
4
f(x2)
2
f(x1)
0
-1
0
1
2
3
x1
x2
f


Fonction décroissante
6
f
4
f(x1)
f(x2)
2
0
-1
0
1
2
3
x1
x2
-2

Exemple d'étude de variations en utilisant des inégalités :
Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x + 3$.

Exemple d'étude de variations en utilisant des inégalités :
Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x + 3$.
Pour étudier ses variations l'intervalle $\mathbb{R}$, soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leq x_2$.

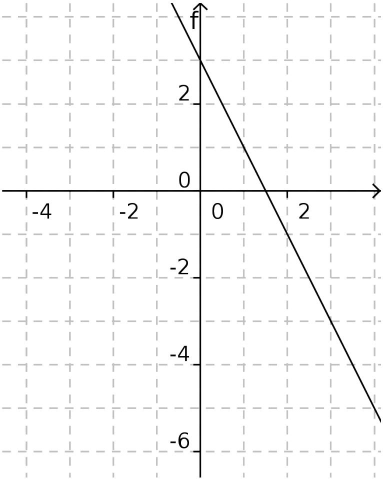
Exemple d'étude de variations en utilisant des inégalités :
Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x + 3$.
Pour étudier ses variations l'intervalle $\mathbb{R}$, soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leq x_2$.
On va étudier si appliquer la fonction à x_1 et x_2 change ou ne change pas le sens de l'inégalité.

Exemple d'étude de variations en utilisant des inégalités :
Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x + 3$.
Pour étudier ses variations l'intervalle $\mathbb{R}$, soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leq x_2$.
On va étudier si appliquer la fonction à x_1 et x_2 change ou ne change pas le sens de l'inégalité.
D'après les règles sur les inégalités, -2 étant négatif on a donc $-2x_1 \geq -2x_2$

Exemple d'étude de variations en utilisant des inégalités :
Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x + 3$.
Pour étudier ses variations l'intervalle $\mathbb{R}$, soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leq x_2$.
On va étudier si appliquer la fonction à x_1 et x_2 change ou ne change pas le sens de l'inégalité.
D'après les règles sur les inégalités, -2 étant négatif on a donc
$-2x_1 \geq -2x_2$
Puis $-2x_1 + 3 \geq -2x_2 + 3$

Exemple d'étude de variations en utilisant des inégalités :
Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x + 3$.
Pour étudier ses variations l'intervalle $\mathbb{R}$, soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leq x_2$.
On va étudier si appliquer la fonction à x_1 et x_2 change ou ne change pas le sens de l'inégalité.
D'après les règles sur les inégalités, -2 étant négatif on a donc $-2x_1 \geq -2x_2$
Puis $-2x_1 + 3 \geq -2x_2 + 3$
C'est à dire $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Exemple d'étude de variations en utilisant des inégalités :
Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x + 3$.
Pour étudier ses variations l'intervalle $\mathbb{R}$, soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leq x_2$.
On va étudier si appliquer la fonction à x_1 et x_2 change ou ne change pas le sens de l'inégalité.
D'après les règles sur les inégalités, -2 étant négatif on a donc $-2x_1 \geq -2x_2$
Puis $-2x_1 + 3 \geq -2x_2 + 3$
C'est à dire $f(x_1) \geq f(x_2)$.
La fonction f a donc changé le sens de l'inégalité, elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.


f
2
0
-2
-4
-6
-4
-2
0
2

Algorithmique :

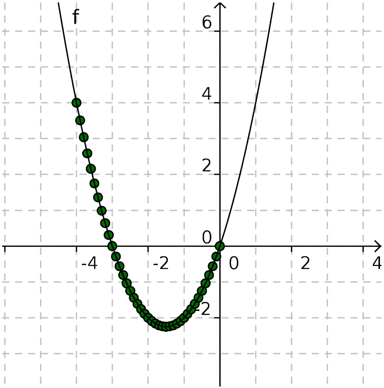
L'algorithme suivant recherche une valeur approchée à 0,01 près du minimum de la fonction définie par $x \mapsto x^2 + 3x$ sur l'intervalle [-3 ;0] :

Début traitement

  m prend la valeur 0 ;
  x_m prend la valeur 0.
  pour *x de -3 à 0 par pas de 0,1* **faire**
    si $x^2 + 3x < m$ **alors**
      m prend la valeur de $x^2 + 3x$
      x_m prend la valeur de x
    fin
  fin

Fin

Sorties : x_m,m


f
6
4
2
0
-2
-4
-2
0
2
4