

Étude algébrique de fonctions, classe de seconde

F.Gaudon

15 janvier 2012

Table des matières

1	Maximum, minimum	2
2	Croissance, décroissance	3
3	Recherche approchée d'un minimum ou d'un maximum	5

Une approche graphique ne suffit pas pour connaître les variations d'une fonction. Pour se convaincre des limites d'une approche graphique, on pourra faire tracer la fonction f définie par $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{1000}$ sur $[-5; 5]$ puis sur d'autres intervalles...

1 Maximum, minimum

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- La fonction f admet un *maximum* M en un réel x_0 de l'intervalle I lorsque :
pour tout nombre x de I , $f(x) - M \leq 0$
et $M = f(x_0)$.
- La fonction f admet un *minimum* m en un réel x_0 de l'intervalle I lorsque :
pour tout nombre x de I $f(x) - m \geq 0$;
et $m = f(x_0)$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(x) = -3x^2 + 2$.

Montrons que 2 est un maximum pour la fonction f sur $[0; 10]$.

On a d'abord $f(0) = 2$.

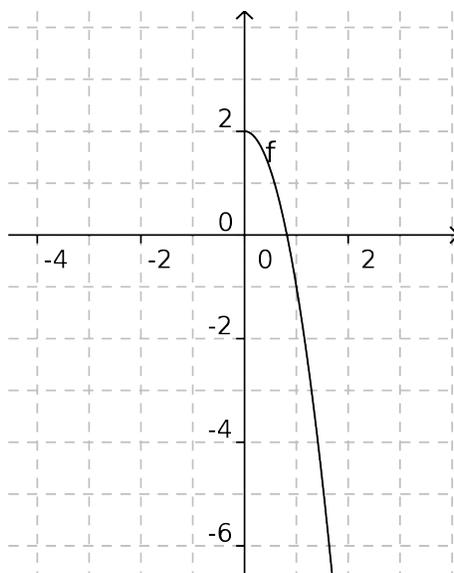
En outre, pour tout réel x de l'intervalle, $f(x) - 2 = -3x^2 + 2 - 2 = -3x^2$.

Or si x est positif, alors $-3x^2$ est négatif.

Donc $f(x) - 2 \leq 0$.

Ce qui montre que $f(x) \leq 2$.

D'où 2 est un maximum pour la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.



2 Croissance, décroissance

Propriétés (rappels sur les propriétés des inégalités) :

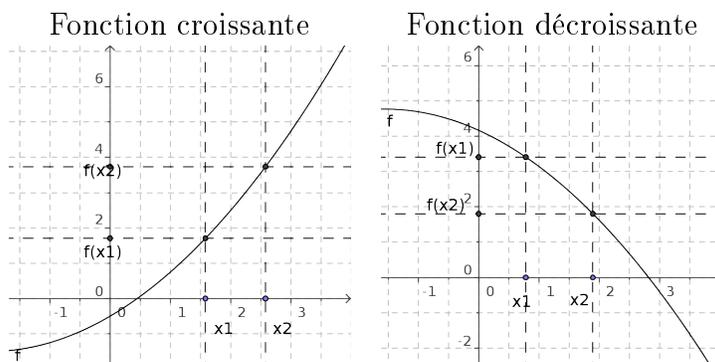
Soient a, b, c trois nombres réels :

- si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$,
c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas* lorsque l'*on ajoute le même nombre* dans les deux membres ;
- si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$,
c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas* lorsque l'on *multiplie les deux membres* de l'inégalité par un *même nombre strictement positif* ;
- si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $ac \geq bc$,
c'est à dire que le sens de l'inégalité change lorsque l'on *multiplie les deux membres* de l'inégalité par le *même nombre strictement négatif*.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- La fonction f est dite *croissante* sur l'intervalle I lorsque pour tous les nombres a et b de I tels que $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$, c'est à dire qu'appliquer la fonction *ne change pas le sens des inégalités*.
- La fonction f est dite *décroissante* sur l'intervalle I lorsque pour tous les nombres a et b de I tels que $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$, c'est à dire qu'appliquer la fonction *change le sens des inégalités*.



Exemple d'étude de variations en utilisant des inégalités :

Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x + 3$.

Pour étudier ses variations l'intervalle \mathbb{R} , soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leq x_2$.

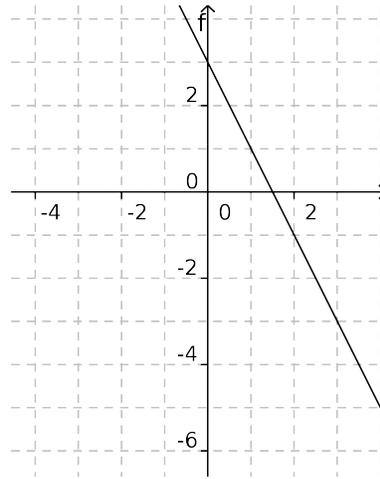
On va étudier si appliquer la fonction à x_1 et x_2 change ou ne change pas le sens de l'inégalité.

D'après les règles sur les inégalités, -2 étant négatif on a donc $-2x_1 \geq -2x_2$

Puis $-2x_1 + 3 \geq -2x_2 + 3$

C'est à dire $f(x_1) \geq f(x_2)$.

La fonction f a donc changé le sens de l'inégalité, elle est donc décroissante sur \mathbb{R} .



3 Recherche approchée d'un minimum ou d'un maximum

Algorithmique :

L'algorithme suivant recherche une valeur approchée à 0,01 près du minimum de la fonction définie par $x \mapsto x^2 + 3x$ sur l'intervalle $[-3;0]$:

Début traitement

```

m prend la valeur 0;
xm prend la valeur 0.
pour x de -3 à 0 par pas de 0,1 faire
    si x2 + 3x < m alors
        m prend la valeur de x2 + 3x
        xm prend la valeur de x
    fin
fin

```

Fin

Sorties : x_m, m

TI :

```

0 [->] M
0 [->] X
For ( [I], -3, 0, 0.1 )
If I^+3*I < M
Then
I^+ 3*I [->] M
I [->] X
End
End
Disp X, M

```

For, *If*, *Then*, *End* sont accessibles dans le menu **PRGM** **CTL** (contrôle). **<** se trouve dans le menu **2nd** **TEST** **TEST**. **Disp** se trouve dans le menu **PRGM** **I/O** (Input/Output).

Casio :

```

0 [->] M
0 [->] X
For -3 [->] I To 0
Step 0.1
If I^+3*I < M
Then
I^+3*I [->] M
I [->] X
EndIf
Next
X Δ
M Δ

```

For, *To*, *Step*, *Next*, *If*, *IfEnd* sont accessibles dans le menu **SHIFT** **PRGM** puis **COM**. **<** se trouve dans le menu **PRGM** **REL**. **Δ** se trouve dans le menu **SHIFT** **PRGM** puis faire défiler avec **▶** pour le trouver.

XCas :

```

m := 0;
xm := 0;
pour a de -3 jusque 0
...pas 0.1 faire
si a^2+3*a<m alors
m := a^2+3*a;
xm := a;
fsi;
fpour;
afficher(xm+" ; "+m);

```

