Repérage dans le plan, cours pour la classe de seconde

F.Gaudon

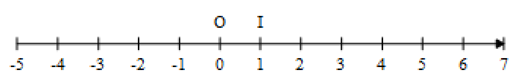
30 août 2016

Table des matières

1 Coordonnées dans un repère du plan

Définition :

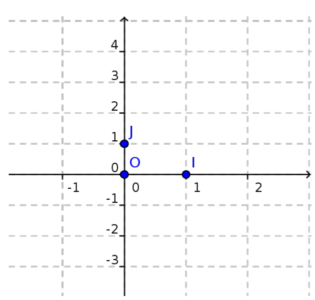
- On appelle ensemble des *nombres entiers naturels* et on note $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres 0, 1, 2, ..., 10, 11,... 123,... .
- On appelle ensemble des *nombres entiers relatifs* et on note $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres ...,-87, .., -3,-2,-1,0,1,2, ...,15,... .
- On appelle ensemble des *nombres réels* et on $\mathbb{R}$ l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.

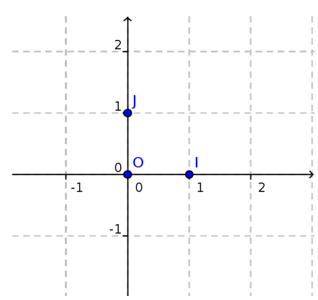


Définition :

Un *repère* du plan est défini par la donnée de trois points non alignés O, I et J formant un triangle. On note alors $(O; I; J)$ le repère ainsi défini.
Un repère est dit :

- *orthogonal* si OIJ est un triangle rectangle en O ;
- *orthonormé* ou *orthonormal* si OIJ un triangle rectangle isocèle de sommet principal O.

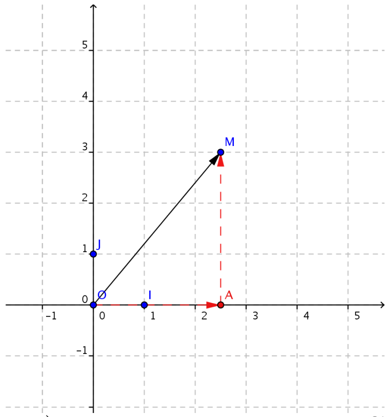


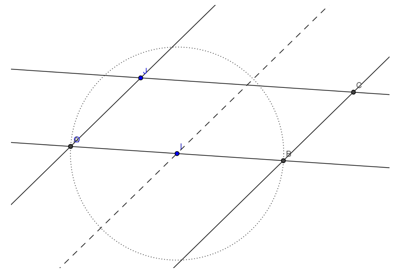


Définition et propriété :

À tout point M du plan, on associe un unique couple $(x; y)$ de nombres réels appelé *couple de coordonnées* du point M dans le repère $(O; I; J)$.

- x est appelé *abscisse* du point M ;
- y est appelé *ordonnée* du point M.





Repère $(O; I; J)$ quelconque. Le point C a pour coordonnées (2 ;1).

2 Milieu d'un segment et distance dans un repère orthonormé

2.1 Milieu d'un segment

Propriété :

Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ d'un repère $(O; I; J)$. Alors le *milieu* K du segment $[AB]$ a pour abscisse la moyenne des deux abscisses et pour ordonnée la moyenne des ordonnées, c'est à dire, a pour coordonnées :

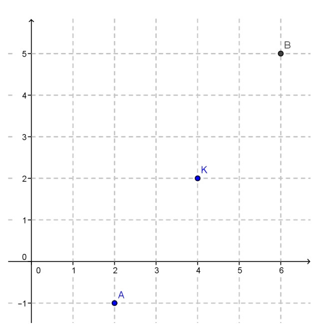
$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$$

et

$$y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Exemples :

- Soient $A(5; 7)$ et $B(-3; 2)$. Alors le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées :
  $x_K = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{5+(-3)}{2} = 1$
  et $y_K = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{7+2}{2} = \frac{9}{2}$
- Soient $A(2; -1)$ et $K(4; 2)$. Le point $B(x; y)$ tel que K est le milieu de $[AB]$ vérifie
  $4 = \frac{2+x}{2}$ et $2 = \frac{-1+y}{2}$
  donc $2 + x = 8$ et $-1 + y = 4$
  d'où $x = 6$ et $y = 4 + 1$
  c'est à dire $y = 5$.



Algorithmique :
Algorithme de calcul des coordonnées du milieu du segment $[AB]$ avec A et B de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$:

Entrées : x_A, y_A, x_B, y_B
Début traitement
x_K prend la valeur $\frac{x_A+x_B}{2}$;
y_K prend la valeur $\frac{y_A+y_B}{2}$.
Fin
Sorties : x_K, y_K

2.2 Distance entre deux points

Propriété :

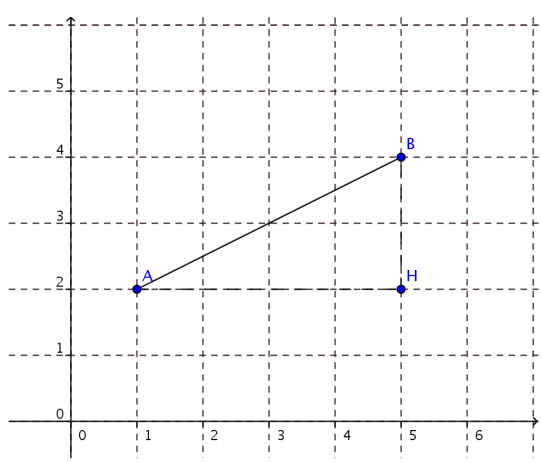
On considère deux points A et B de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère $(O; I; J)$ orthonormal. Alors la distance AB est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$AB = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

Preuve :
On supposera afin d'alléger les écritures que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$, les autres cas se démontrant de la même manière. Soit H le point de coordonnées $(x_B; y_A)$. Le repère est orthonormal donc les droites (AH) et (BH) sont perpendiculaires en H et l'unité est la même sur les deux axes. La distance AH vaut $x_B - x_A$ et la distance BH est $y_B - y_A$. Dans le triangle ABH rectangle en H, le théorème de PYTHAGORE permet donc d'écrire que $AB^2 = AH^2 + BH^2$ c'est à dire $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ d'où la formule.



Exemple :
On considère les points $A(8;-2)$ et $B(-2;4)$. Alors la distance AB est :
$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
donc $AB=\sqrt{(-2-8)^2+(4-(-2))^2}$
d'où $AB=\sqrt{(-10)^2+6^2}$
et $AB=\sqrt{136}$ donc $AB=2\sqrt{34}$

Algorithmique :
Algorithme de calcul de la distance entre deux points A et B de coordonnées respectives $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$:

Entrées : x_A, y_A, x_B, y_B
Début traitement
    d prend la valeur $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
Fin
Sorties : d