Simulations et probabilités

Simulations et probabilités, classe de seconde

F.Gaudon

http://mathsfg.net.free.fr

5 février 2012

Définition :

- Une *expérience aléatoire* est une expérience dont le résultat soumis au hasard n'est pas prévisible.
- L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire constitue *l'univers* de tous les possibles.
- *Simuler* une expérience aléatoire, c'est la remplacer par une autre expérience aléatoire dont les distributions de fréquences qu'elle donnerait pour un grand nombre de tirages seraient proches.

Exemple :

- Le lancer d'un dé à six faces constitue une expérience aléatoire d'issues x_i pour i allant de 1 à 6 et correspondants à la sortie de la face i du dé. Il y a donc 6 issues ou éventualités possibles.
- En supposant qu'il naît autant de garçons que de filles, la naissance d'un garçon ou d'une fille peut être simulée par un lancer de pièce, le côté « pile » représentant la naissance d'un garçon, le côté « face » la naissance d'une fille.

Propriété :

Soit n un entier naturel. La séquence suivante permet d'obtenir des nombres entiers naturels au hasard compris entre 1 et n afin de simuler une expérience aléatoire comportant n issues possibles :

$$ENT(\text{nombre aléatoire} \times n) + 1$$

Définition :

Pour tout expérience aléatoire d'issues possibles x_1, x_2, ..., x_n avec n entier naturel, on définit une *loi de probabilité* en leur associant n nombres réels p_1, p_2, ..., p_n tels que :

- pour tout i allant de 1 à n, $0 \leq p_i \leq 1$;
- $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Propriété (loi des grands nombres) :

Si on répète une expérience aléatoire d'univers $E = \{x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots ; x_n\}$ un « grand nombre de fois » et pour une loi de probabilité adaptée à la situation, alors les fréquences de réalisation des issues x_i se stabilisent autour des nombres p_i

Exemple :

- On jette un dé 100 fois et on note la face apparue à chaque lancer. Si le 1 apparaît 12 fois la fréquence de sortie est $\frac{12}{100} = 0,12$. On a $f_1 + f_2 + \ldots + f_6 = 1$.
  Si le nombre de lancers devient grand, les fréquences se stabilisent autour de $\frac{1}{6}$, probabilité d'apparition du 1.
- Une pièce de monnaie est truquée de sorte que la probabilité d'obtenir pile est le double de celle d'obtenir face. On appelle p_1 la probabilité d'obtenir pile et p_2 celle d'obtenir face. On a donc $p_1 + p_2 = 1$. Or $p_1 = 2 \times p_2$ donc $2p_2 + p_2 = 1$ d'où $3p_2 = 1$ et $p_2 = \frac{1}{3}$ et $p_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Définition :

On considère une expérience aléatoire d'univers des possibles E.

- Un ensemble d'issues constitue un *événement*. Un événement A est donc une partie de l'univers.
- $\emptyset$ est appelé *événement impossible*.
- E est l'événement *certain*.

Exemple :
lancer d'un dé à six faces :

- "obtenir 1 ou 2" est un événement ;
- "obtenir 7" est l'événement impossible.

Définition et propriétés :

- Pour tout événement A, on a $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le réalise ;
- $P(\emptyset) = 0$;
- $P(E) = 1$;

Définition et propriété :

Lorsque les n issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité p de se réaliser, on parle de *loi équiré-partie* ou de situation d'*équiprobabilité*. Alors $p = \frac{1}{n}$.

Exemple :

Pour le lancer d'un dé non truqué à six faces, chaque face ayant la même probabilité d'apparaître, la loi est équirépartie et chaque face i a une probabilité p_i d'apparaître égale à $p_i = \frac{1}{6}$

Propriété (cas d'une loi équirépartie) :

Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à A}}{\text{nombre d'issues possibles dans E}}$$

Définition :

Soient A et B deux événements.

- L'événement $A \cap B$ (lire "A inter B" ou "A et B") est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A et B.
- Lorsqu'aucune issue ne réalise A et B, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont *incompatibles* ou *disjoints*.
- L'événement $A \cup B$ (lire "A union B" ou "A ou B") est l'ensemble des issues qui réalisent l'événement A ou l'événement B ou les deux, c'est à dire au moins l'un des deux événements.
- L'événement $\bar{A}$ appelé événement *complémentaire* ou *contraire* de A est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A.

Propriété :

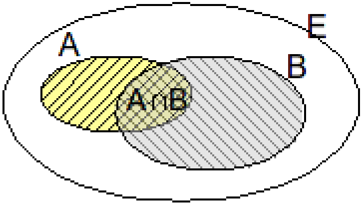
Soit P une loi de probabilité sur un ensemble E.

- Pour tous les événements A et B, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- En particulier, si A et B sont des événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Pour tout les événements A et B,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$


E
A
B
A∩B

Exemple :

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Chaque carte a la même probabilité $\frac{1}{32}$ d'être tirée. On appelle C l'événement « On tire un coeur » et R l'événement « On tire un roi ».
La probabilité $P(C)$ est $\frac{8}{32}$. La probabilité $P(R)$ est $\frac{4}{32}$.
$R \cap C$ est l'événement « On tire le roi de coeur ». Sa probabilité $P(R \cap C)$ est $\frac{1}{32}$.
$R \cup C$ est l'événement « On tire un roi ou un coeur ». Sa probabilité est $\frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$. On enlève $\frac{1}{32}$ afin de ne pas compter deux fois le roi de coeur.