

Études de signes et inéquations, cours de seconde

F.Gaudon

9 avril 2012

Table des matières

1	Étude du signe des fonctions affines	2
2	Études de signes de produits et de quotients	2
2.1	Exemple d'étude de signe d'un produit	2
2.2	Exemple d'étude de signe d'un quotient	2
3	Résolution d'inéquations	3
3.1	Exemple de résolution d'inéquation produit	3
3.2	Synthèse sur les inéquations	3

1 Étude du signe des fonctions affines

Synthèse :

Si $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $ax + b$	-	0	+

Si $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $ax + b$	+	0	-

2 Études de signes de produits et de quotients

2.1 Exemple d'étude de signe d'un produit

On considère le produit

$$(x - 3)(1 - x)$$

- $x - 3 = 0$ pour $x = 3$ et $1 - x = 0$ pour $x = 1$.
- On fait apparaître dans un tableau de signes, les signes de $x - 3$ et de $1 - x$, puis on utilise la règle des signes.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x - 3$		-	0	+
$1 - x$		+	0	-
$(x - 3)(1 - x)$		-	+	-

2.2 Exemple d'étude de signe d'un quotient

On considère le quotient

$$\frac{3 - 2x}{x + 1}$$

- On détermine les *valeurs interdites* :
Ici, on doit avoir $x + 1 \neq 0$ c'est à dire $x \neq -1$.
- On procède de même que pour l'étude de signe d'un produit.
 $3 - 2x = 0$ pour $x = \frac{3}{2}$ et $x + 1 = 0$ pour $x = -1$.

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$3 - 2x$		+	0	-
$x + 1$		-	0	+
$\frac{3-2x}{x+1}$		-	+	-

3 Résolution d'inéquations

3.1 Exemple de résolution d'inéquation produit

On considère l'inéquation

$$\frac{3x + 1}{x - 2} \leq 5$$

- On détermine la valeur interdite : $x - 2 = 0$ donne $x = 2$.
- On écrit l'inéquation sous la forme d'une inéquation quotient nul :

$$\frac{3x + 1}{x - 2} - 5 \leq 0$$

$$\frac{3x + 1 - 5(x - 2)}{x - 2} \leq 0$$

$$\frac{3x + 1 - 5x + 10}{x - 2} \leq 0$$

$$\frac{-2x + 11}{x - 2} \leq 0$$

- On étudie le signe du quotient obtenu :
 $-2x + 11 = 0$ pour $x = \frac{11}{2}$

x	$-\infty$	2	5,5	$+\infty$		
$-2x + 11$		+	+	0	-	
$x - 2$		-	0	+	+	
$\frac{-2x+11}{x-2}$		-		+	0	-

- On détermine à partir du tableau les valeurs de x solutions de l'inéquation :

$$S = [-\infty; 2[\cup [5, 5; +\infty[$$

3.2 Synthèse sur les inéquations

Démarche de résolution :

Pour résoudre une inéquation donnée, on utilise des développements, des factorisations ou des transpositions d'un membre à l'autre pour se ramener à :

- Une inéquation du premier degré ;
- une inéquation produit nul ;
- ou une inéquation quotient nul.

Exemple :

$$(x + 2)^2 \leq 9$$

$$(x + 2)^2 - 9 \leq 0$$

$$(x + 2)^2 - 3^2 \leq 0$$

$$(x + 2 - 3)(x + 2 + 3) \leq 0 \text{ d'après l'identité remarquable}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(x - 1)(x + 5) \leq 0$$

C'est une inéquation produit nul. On étudie donc le signe du produit $(x - 1)(x + 5)$:

$x - 1 = 0$ pour $x = 1$ et $x + 5 = 0$ pour $x = -5$.

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$x - 1$		-	-	0 +
$x + 5$		-	0 +	+
$(x - 1)(x + 5)$		+	0 -	0 +

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble $[-5; 1]$.