Introduction aux fonctions, classe de seconde

F.Gaudon

16 mai 2010

Table des matières

1 Vocabulaire

Définition :

- Une *fonction* est un procédé qui permet d'associer à tout nombre x, élément d'un ensemble E « de départ » , un nombre unique noté $f(x)$.
- L'ensemble E est *l'ensemble de définition* de la fonction f.
- Le nombre $f(x)$ est appelé *l'image* du nombre x par la fonction f.
- Le nombre x est appelé *l'antécédent* du nombre $f(x)$.

Exemple :
Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 + 3x$.
On a :

$$g(-5) = (-5)^2 + 3 \times (-5)$$
$$g(-5) = 25 + (-15)$$
$$g(-5) = 10$$

-5 a donc pour image 10 par la fonction g ce qui signifie aussi que -5 est un antécédent de 10 par la fonction g.

Algorithmique :
Algorithme de calcul de l'image d'un nombre par une fonction :

Entrées : x, f
Début traitement
| fx prend la valeur $f(x)$;
Fin traitement.
Sorties : fx

Remarque :
Pour toute fonction f, un nombre x a une et une seule image par f. Par contre, tout nombre n'a pas d'antécédent par f ou peut en avoir plusieurs. Par exemple, si f est la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$, 3 a pour unique image 9 par f mais 9 a deux antécédents qui sont -3 et 3 par f.

Exemple :
On peut utiliser un *tableau de valeurs* pour représenter des nombres et leurs images par une fonction. Par exemple pour la fonction g définie par $g(x) = x^2 + 3x$:

x	-2	-1	0	1,5	2
$g(x)$	-2	-2	0	6,75	10

Attention, tous les tableaux de valeurs ne sont pas des tableaux de valeur de fonctions. Par exemple, le tableau suivant :

x	-2	-2	0	1,5	2
y	-2	-4	1	3	6

n'est pas le tableau de valeurs d'une fonction car pour $x = -2$, y prend deux valeurs différentes.

Algorithmique :
La construction du tableau de valeurs d'une fonction f définie sur l'intervalle $[a; b]$ avec un pas de h se traduit par l'algorithme suivant :

```
Entrées : a,b,h,f
Début traitement
  pour x allant de a à b par pas de h faire
    fx prend la valeur de f(x) ;
    Afficher x et fx.
  fin
Fin traitement.
```

Exemple :
Construction du tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x$ sur l'intervalle $[-2; 2]$ par pas de 0,1 :

TI :

```
For ( I , -2 , 2 , 0.5 )
I^2+3*I -> Y
Disp I , Y
End
```

For et End sont accessibles dans le menu PRGM CTL (contrôle). Disp se trouve dans le menu PRGM I/O (Input/Output).

Casio :

```
For -2 -> I To 2
        Step 0.5
I^2+3*I -> Y
I◢
Y◢
Next
```

For, To, Step et Next sont accessibles dans le menu SHIFT PRGM puis COM. ◢ se trouve dans le menu SHIFT PRGM puis faire défiler avec ▶ pour le trouver.

XCas :

```
pour u de -2 jusque 2
              pas 0.1 faire
  fu:=u^2+3*u;
  afficher(u,fu);
fpour;
```

Avant de taper le programme, on ouvrira au préalable une fenêtre de programme en appuyant en même temps sur ALT et P. Après avoir entré le programme, cliquer sur OK pour le lancer.

2 Transformations d'écritures

Propriété :

Pour tous les nombres réels a, b et k :

$$k(a+b) = ka + kb$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

forme factorisée, produit — *forme développée, somme*

Propriété :

Pour tous les nombres réels a et b on a les *identités remarquables* suivantes :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

forme factorisée, produit — *forme développée, somme*

3 Intervalles de nombres réels

Définition :

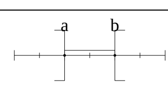
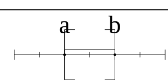
On appelle ensemble des nombres *réels*, noté $\mathbb{R}$, l'ensemble des abscisses des points de toute droite graduée (par exemple 1, -3, $\sqrt{2}$, π, etc.) ;

Définitions :

Soient a et b deux nombres réels avec a inférieur strictement à b.

- $[a; b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$. On l'appelle *intervalle fermé* d'extrémités a et b.
- $]a; b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$. On l'appelle *intervalle ouvert* d'extrémités a et b.
- $[a; b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$. Cet intervalle est dit *ouvert* en b et *fermé* en a.

Exemples de représentation sur une droite graduée :

$]a; b[$	
$[a; b]$	

4 Représentation graphique

4.1 Notion de représentation graphique

Définition :

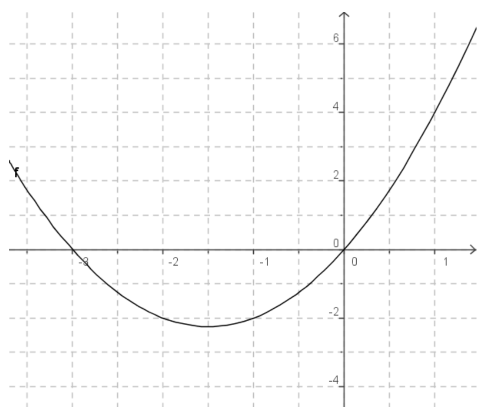
- Soit f une fonction définie sur un ensemble E de $\mathbb{R}$. On appelle *courbe représentative* ou *représentation graphique* de la fonction f l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x; f(x))$ dans un repère du plan avec x parcourant l'ensemble de définition E .
- Un point M de coordonnées $(x; y)$ appartient donc à la courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation $y = f(x)$ appelée *équation de la courbe représentative* $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.

Exemple :

Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de la fonction g définie par $g(x) = x^2 + 3x$ sur l'intervalle $[-2; 3]$.

D'après le tableau de valeurs vu plus haut, les points M_1, M_2, M_3 de coordonnées respectives $(-2; -2)$, $(-1; -2)$, $(0; 0)$ sont des points de la courbe représentative de la fonction g

D'où la représentation graphique :



Algorithmique :

- Algorithme de placement de points appartenant à la représentation graphique d'une fonction f définie sur un intervalle $[a;b]$ par pas de h :

```
Entrées : f, a, b, h
Début traitement
    pour x allant de a à b par pas de h faire
        fx prend la valeur de f(x);
        Placer le point de coordonnées (x; fx).
    fin
Fin traitement.
```

- Algorithme qui teste l'appartenance d'un point de coordonnées $(x_A;y_A)$ à la courbe représentative d'une fonction f donnée :

```
Entrées : f, x_A, y_A
Début traitement
    si y_A = f(x_A) alors
        ap prend la valeur "Oui"
    sinon
        ap prend la valeur "Non"
    fin
Fin traitement.
Sorties : ap
```

Exemple :

Test de l'appartenance d'un point de coordonnées $(x_A;y_A)$ à la courbe représentative de $f : x \mapsto x^2+3x$. xA et yA seront notées respectivement A et B pour des raisons de limitation technique du nommage des variables sur TI et Casio.

TI :	Casio :	XCas :

Prompt A,B
If $A^2+3*A=B$
Then
Disp "OUI"
Else
Disp "NON"
	"A"? $\rightarrow A$
	"B"? $\rightarrow B$
	If $A^2+3*A=B$
	Then "OUI"
	Else "NON"
	ifEnd
		`saisir("xA=",xA);`
		`saisir("yA=",yA);`
		`si(xA^2+3*xA==yA) alors`
		`ap:="Oui";`
		`sinon`
		`ap:="Non";`
		`afficher(ap);`

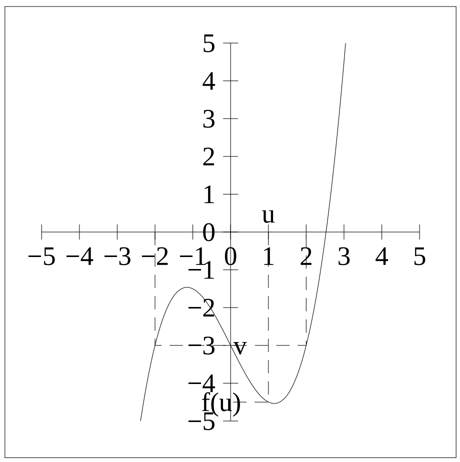
Propriété :

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f.

- L'image $f(x)$ d'un nombre x par f se lit sur l'axe des ordonnées : c'est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $(x; 0)$;
- les antécédents s'il y en a de tout nombre y par f se lisent sur l'axe des abscisses : ce sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $(0; y)$.

Exemple :
Sur la courbe ci-dessous représentant une fonction f,

- l'image de 1 est -4,5 ;
- -3 a trois antécédents qui sont -2, 0 et 2.

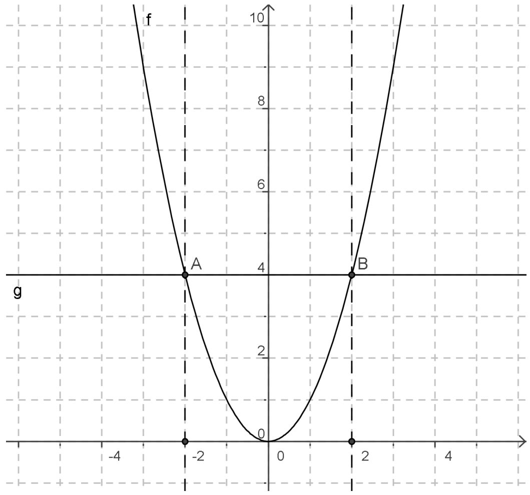


4.2 Application à la résolution graphique d'équations

Propriété :

Soit k un nombre réel, f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère. Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $(0; k)$.

Exemple :
Sur la figure ci-dessous, est représentée la fonction f définie par $f(x) = x^2$.



La droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées (0 ;4) coupe la courbe en deux points A et B d'abscisses -2 et 2. L'équation $f(x) = 4$ a donc pour solutions 2 et -2.