Fonction inverse et fonctions homographiques

Fonction inverse et fonctions homographiques

F. Gaudon

http://mathsfg.net.free.fr

9 avril 2012

Définition

On appelle fonction inverse la fonction f définie pour tout nombre réel appartenant à $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Variations :

La fonction inverse est :

- décroissante sur $]-\infty;0[$;
- décroissante sur $]0;+\infty[$.

$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

Preuve :

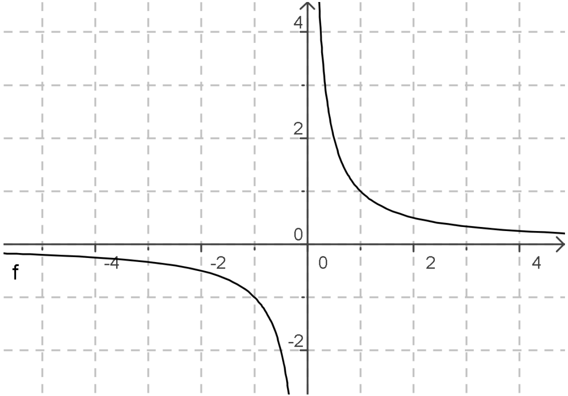
- Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $0 < x_1 \leq x_2$. On multiplie cette inégalité par $\frac{1}{x_1 x_2}$ qui est positif. On a donc $\frac{x_1}{x_1 x_2} \leq \frac{x_2}{x_1 x_2}$ c'est à dire $\frac{1}{x_2} \leq \frac{1}{x_1}$ ce qui montre que la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$.
- Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 \leq x_2 < 0$. On multiplie cette inégalité par $\frac{1}{x_1 x_2}$ qui est positif. On a donc $\frac{x_1}{x_1 x_2} \leq \frac{x_2}{x_1 x_2}$ c'est à dire $\frac{1}{x_2} \leq \frac{1}{x_1}$ ce qui montre que la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$.

Signe :

La fonction inverse est négative sur $]-\infty;0[$ et positive sur $]0;+\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		-	$\|\|$	+	

Représentation graphique :
Elle est appelée *hyperbole*.



Remarque :

Pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$. La fonction est dite impaire.
Sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Plan

Définition

Soient a, b, c et d quatre réels avec $c \neq 0$. La fonction définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ pour tout x réel différent de $\frac{-d}{c}$ est appelée fonction homographique.

Définition

on appelle **valeur interdite** *d'une fonction f donnée, tout réel x n'appartenant pas à l'ensemble de définition de la fonction f.*

Exemple :
f définie par $f(x) = \frac{3x+2}{-4x+5}$ est une fonction homographique.

Exemple :

f définie par $f(x) = \frac{3x+2}{-4x+5}$ est une fonction homographique.
$-4x+5=0$ équivaut à $-4x=-5$

Exemple :
f définie par $f(x) = \frac{3x+2}{-4x+5}$ est une fonction homographique.
$-4x + 5 = 0$ équivaut à $-4x = -5$
ou encore à $x = \frac{5}{4}$.

Exemple :
f définie par $f(x) = \frac{3x+2}{-4x+5}$ est une fonction homographique.
$-4x + 5 = 0$ équivaut à $-4x = -5$
ou encore à $x = \frac{5}{4}$.
$\frac{5}{4}$ est une *valeur interdite* pour f.

Exemple :

f définie par $f(x) = \frac{3x+2}{-4x+5}$ est une fonction homographique.
$-4x + 5 = 0$ équivaut à $-4x = -5$
ou encore à $x = \frac{5}{4}$.
$\frac{5}{4}$ est une *valeur interdite* pour f.
L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{\frac{5}{4}\}$.

Propriété

La représentation graphique d'une fonction homographique dans un repère orthogonal est une hyperbole.

Plan

Propriété

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul.

Exemple d'application 1 :
On considère l'équation

$$\frac{(3x+2)(4x+1)}{5x+3} = 0.$$

Exemple d'application 1 :
On considère l'équation

$$\frac{(3x+2)(4x+1)}{5x+3} = 0.$$

- Recherche de la valeur interdite :

Exemple d'application 1 :
On considère l'équation

$$\frac{(3x+2)(4x+1)}{5x+3} = 0.$$

- Recherche de la valeur interdite :
  $5x+3=0$ si et seulement si $5x=-3$ c'est à dire $x=\frac{-3}{5}$.

Exemple d'application 1 :
On considère l'équation

$$\frac{(3x+2)(4x+1)}{5x+3} = 0.$$

- Recherche de la valeur interdite :
  $5x+3=0$ si et seulement si $5x=-3$ c'est à dire $x=\frac{-3}{5}$.
  $\frac{-3}{5}$ est donc la seule valeur interdite.

Exemple d'application 1 :
On considère l'équation

$$\frac{(3x+2)(4x+1)}{5x+3} = 0.$$

- Recherche de la valeur interdite :
  $5x+3=0$ si et seulement si $5x=-3$ c'est à dire $x=\frac{-3}{5}$.
  $\frac{-3}{5}$ est donc la seule valeur interdite.
- On résout l'équation sur $\mathbb{R}-\{\frac{-3}{5}\}$.

Exemple d'application 1 :
On considère l'équation

$$\frac{(3x+2)(4x+1)}{5x+3} = 0.$$

- Recherche de la valeur interdite :
  $5x+3=0$ si et seulement si $5x=-3$ c'est à dire $x=\frac{-3}{5}$.
  $\frac{-3}{5}$ est donc la seule valeur interdite.
- On résout l'équation sur $\mathbb{R}-\{\frac{-3}{5}\}$.
  $\frac{(3x+2)(4x+1)}{5x+3}=0$ si et seulement si $(3x+2)(4x+1)=0$

Exemple d'application 1 :
On considère l'équation

$$\frac{(3x+2)(4x+1)}{5x+3} = 0.$$

- Recherche de la valeur interdite :
  $5x+3=0$ si et seulement si $5x=-3$ c'est à dire $x=\frac{-3}{5}$.
  $\frac{-3}{5}$ est donc la seule valeur interdite.
- On résout l'équation sur $\mathbb{R}-\{\frac{-3}{5}\}$.
  $\frac{(3x+2)(4x+1)}{5x+3}=0$ si et seulement si $(3x+2)(4x+1)=0$
  c'est à dire $3x+2=0$ ou $4x+1=0$

Exemple d'application 1 :
On considère l'équation

$$\frac{(3x+2)(4x+1)}{5x+3} = 0.$$

- Recherche de la valeur interdite :
  $5x+3=0$ si et seulement si $5x=-3$ c'est à dire $x=\frac{-3}{5}$.
  $\frac{-3}{5}$ est donc la seule valeur interdite.
- On résout l'équation sur $\mathbb{R}-\{\frac{-3}{5}\}$.
  $\frac{(3x+2)(4x+1)}{5x+3}=0$ si et seulement si $(3x+2)(4x+1)=0$
  c'est à dire $3x+2=0$ ou $4x+1=0$
  donc $x=\frac{-2}{3}$ ou $x=\frac{-1}{4}$.

Exemple d'application 1 :
On considère l'équation

$$\frac{(3x+2)(4x+1)}{5x+3} = 0.$$

- Recherche de la valeur interdite :
  $5x+3=0$ si et seulement si $5x=-3$ c'est à dire $x=\frac{-3}{5}$.
  $\frac{-3}{5}$ est donc la seule valeur interdite.
- On résout l'équation sur $\mathbb{R}-\{\frac{-3}{5}\}$.
  $\frac{(3x+2)(4x+1)}{5x+3}=0$ si et seulement si $(3x+2)(4x+1)=0$
  c'est à dire $3x+2=0$ ou $4x+1=0$
  donc $x=\frac{-2}{3}$ ou $x=\frac{-1}{4}$.
  Les solutions de l'équation sont donc $\frac{-2}{3}$ et $\frac{-1}{4}$.

Exemple 2 :

On considère l'équation $\frac{x^2-2}{3x-1} = 0$.

Exemple 2 :

On considère l'équation $\frac{x^2-2}{3x-1} = 0$.

- On détermine les valeurs interdites :

Exemple 2 :

On considère l'équation $\frac{x^2-2}{3x-1} = 0$.

- On détermine les valeurs interdites :
  $3x - 1 = 0$ donne $x = \frac{1}{3}$.

Exemple 2 :

On considère l'équation $\frac{x^2-2}{3x-1} = 0$.

- On détermine les valeurs interdites :
  $3x - 1 = 0$ donne $x = \frac{1}{3}$.
- On résout l'équation :

Exemple 2 :

On considère l'équation $\frac{x^2-2}{3x-1} = 0$.

- On détermine les valeurs interdites :
  $3x - 1 = 0$ donne $x = \frac{1}{3}$.
- On résout l'équation :
  on écrit le numérateur sous forme d'un produit en factorisant :

Exemple 2 :

On considère l'équation $\frac{x^2-2}{3x-1} = 0$.

- On détermine les valeurs interdites :
  $3x - 1 = 0$ donne $x = \frac{1}{3}$.
- On résout l'équation :
  on écrit le numérateur sous forme d'un produit en factorisant :

$$\frac{x^2 - 2}{3x - 1} = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{3x - 1}$$

Exemple 2 :

On considère l'équation $\frac{x^2-2}{3x-1} = 0$.

- On détermine les valeurs interdites :
  $3x - 1 = 0$ donne $x = \frac{1}{3}$.
- On résout l'équation :
  on écrit le numérateur sous forme d'un produit en factorisant :

$$\frac{x^2-2}{3x-1} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{3x-1}$$

On résout l'équation produit obtenue :

Exemple 2 :

On considère l'équation $\frac{x^2-2}{3x-1} = 0$.

- On détermine les valeurs interdites :
  $3x - 1 = 0$ donne $x = \frac{1}{3}$.
- On résout l'équation :
  on écrit le numérateur sous forme d'un produit en factorisant :

$$\frac{x^2 - 2}{3x - 1} = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{3x - 1}$$

  On résout l'équation produit obtenue :
  $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$

Exemple 2 :

On considère l'équation $\frac{x^2-2}{3x-1} = 0$.

- On détermine les valeurs interdites :
  $3x - 1 = 0$ donne $x = \frac{1}{3}$.
- On résout l'équation :
  on écrit le numérateur sous forme d'un produit en factorisant :

$$\frac{x^2-2}{3x-1} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{3x-1}$$

On résout l'équation produit obtenue :
$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$
d'où $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

Exemple 2 :

On considère l'équation $\frac{x^2-2}{3x-1} = 0$.

- On détermine les valeurs interdites :
  $3x - 1 = 0$ donne $x = \frac{1}{3}$.
- On résout l'équation :
  on écrit le numérateur sous forme d'un produit en factorisant :

$$\frac{x^2-2}{3x-1} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{3x-1}$$

  On résout l'équation produit obtenue :
  $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$
  d'où $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

En tenant compte des valeurs interdites, les solutions sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}\}$.