Fonction inverse et fonctions hommographiques, classe de seconde

F.Gaudon

14 mars 2010

Table des matières

1 Étude de la fonction inverse

Définition :

> On appelle fonction *inverse* la fonction f définie pour tout nombre réel appartenant à $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par
> $$f(x)=\frac{1}{x}$$

Variations :

La fonction inverse est :

- décroissante sur $]-\infty;0[$;
- décroissante sur $]0;+\infty[$.

$f(x)$	$-\infty$		0		$+\infty$
x	0	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	0

Preuve :

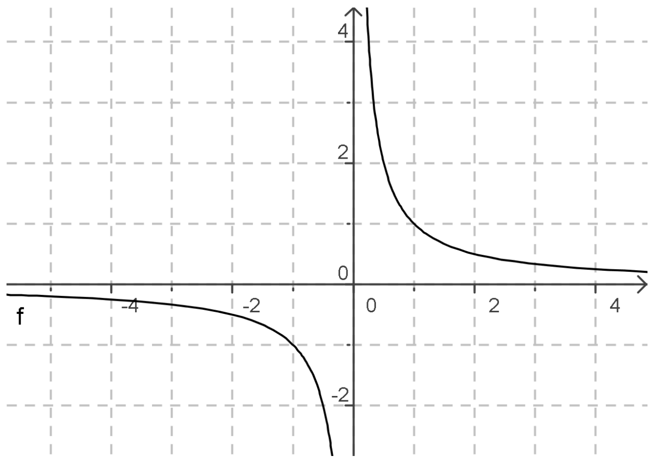
- Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $0<x_1\leq x_2$. On multiplie cette inégalité par $\frac{1}{x_1x_2}$ qui est positif. On a donc $\frac{x_1}{x_1x_2}\leq\frac{x_2}{x_1x_2}$ c'est à dire $\frac{1}{x_2}\leq\frac{1}{x_1}$ ce qui montre que la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$.
- Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1\leq x_2<0$. On multiplie cette inégalité par $\frac{1}{x_1x_2}$ qui est positif. On a donc $\frac{x_1}{x_1x_2}\leq\frac{x_2}{x_1x_2}$ c'est à dire $\frac{1}{x_2}\leq\frac{1}{x_1}$ ce qui montre que la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$.

Signe :

La fonction inverse est négative sur $]-\infty;0[$ et positive sur $]0;+\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		-	$\|\|$	$+$	

Représentation graphique :
Elle est appelée *hyperbole*.



Remarque :
Pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$. La fonction est dite impaire. Sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

2 Fonctions homographiques

2.1 Définition

Définition :

Soient a, b, c et d quatre réels avec $c \neq 0$. La fonction définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ pour tout x réel différent de $\frac{-d}{c}$ est appelée *fonction homographique*.

Définition :

on appelle *valeur interdite* d'une fonction f donnée, tout réel x n'appartenant pas à l'ensemble de définition de la fonction f.

Exemple :

f définie par $f(x) = \frac{3x+2}{-4x+5}$ est une fonction homographique. f n'est pas définie si et seulement si $-4x+5=0$ c'est à dire $-4x=-5$ ou encore $x=\frac{5}{4}$. $\frac{5}{4}$ est appelée *valeur interdite* pour f et l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{\frac{5}{4}\}$.

2.2 Résolution d'équations quotients

Propriété :

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul.

Exemples d'application :

1. On considère l'équation
$$\frac{(3x+2)(4x+1)}{5x+3} = 0.$$
$5x+3=0$ si et seulement si $5x=-3$ c'est à dire $x=\frac{-3}{5}$. $\frac{-5}{3}$ est donc la seule valeur interdite.
On résout l'équation sur $\mathcal{R} - \frac{-5}{3}$.
On a $\frac{(3x+2)(4x+1)}{5x+3} = 0$ si et seulement si $(3x+2)(4x+1) = 0$ c'est à dire $3x+2=0$ ou $4x+1=0$ donc $x=\frac{-2}{3}$ ou $x=\frac{-1}{4}$. Les solutions de l'équation sont donc $\frac{-2}{3}$ et $\frac{-1}{4}$.
2. On considère l'équation
$$\frac{x^2-2}{3x-1} = 0.$$
   - On détermine les valeurs interdites : $3x-1=0$ donne $x=\frac{1}{3}$.

- On écrit le numérateur sous forme d'un produit en factorisant :

$$\frac{x^2-2}{3x-1} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{3x-1}$$

- On résout l'équation produit obtenue :

$$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$$

$$x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

- On détermine les solutions en supprimant les valeurs interdites qui ne peuvent être solutions :

$$S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$