Fonction carré

Fonction carré

F. Gaudon

http://mathsfg.net.free.fr

9 avril 2012

1. Étude de la fonction carré
2. Résolution d'équations

Définition

La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = x^2$$

Variations :

La fonction carré est :

- décroissante sur $]-\infty; 0]$;
- croissante sur $[0; +\infty[$.

Elle admet un minimum égal à 0 en 0.

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & -\infty & & 0 & & +\infty \\
\hline
f(x) & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & 0 & & \\
\hline
\end{array}$$

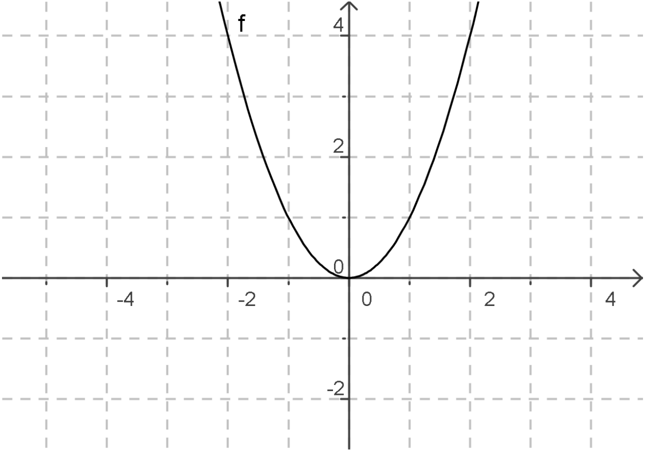
Preuve :

- Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $0 \leq x_1 \leq x_2$. Alors en multipliant par x_1 qui est positif on obtient $0 \leq x_1^2 \leq x_1 x_2$ et en multipliant par x_2 qui est positif on a $0 \leq x_1 x_2 \leq x_2^2$ donc finalement $x_1^2 \leq x_2$ ce qui signifie que la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$.
- Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leq x_2 \leq 0$. Alors en multipliant par x_1 qui est négatif on obtient $x_1^2 \geq x_1 x_2$ et en multipliant par x_2 qui est négatif on a $x_1 x_2 \geq x_2^2$ donc finalement $x_1^2 \geq x_2$ ce qui signifie que la fonction carré est décroissante sur $[0; +\infty[$.

Signe :
La fonction carré est positive sur $]-\infty;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		+	0	+	

Représentation graphique :
La représentation graphique de la fonction carré dans un repère du plan est appelée *parabole*.



Remarque :
Pour tout réel x, on a $f(-x) = f(x)$, on dit que la fonction est paire. Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal.

Propriété

- *Pour tout réel* $k > 0$, *l'équation* $x^2 = k$ *admet deux solutions* $\sqrt{k}$ *et* $-\sqrt{k}$.
- *Pour tout réel* $k < 0$, *l'équation* $x^2 = k$ *n'admet aucune solution réelle.*
- *L'équation* $x^2 = 0$ *admet pour unique solution* 0.

Propriété :
Seul le cas où $k > 0$ n'est pas immédiat. On suppose donc $k > 0$. L'équation s'écrit alors $x^2 - k = 0$ c'est à dire $x^2 - \sqrt{k}^2 = 0$ ce qui équivaut à $(x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}) = 0$ d'après l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Le porduit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, c'est à dire $x - \sqrt{k} = 0$ ou $x + \sqrt{k} = 0$ ce qui justifie le résultat.