Vecteurs, cours pour la classe de seconde

F.Gaudon

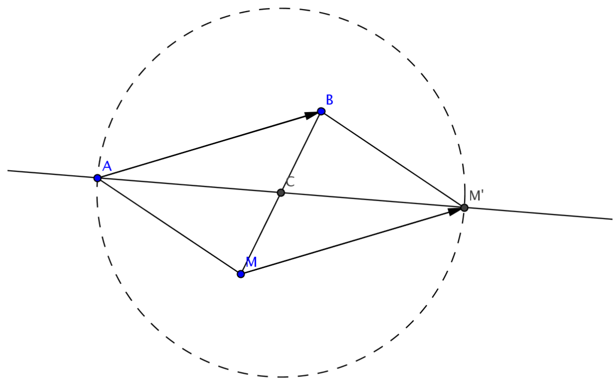
2 septembre 2009

Table des matières

1 Notions de translation et de vecteurs

Définition :

> Soient A et B deux points du plan. Á tout point M du plan, on associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont le même milieu. On dit que M' est *l'image* de M par *la translation de vecteur $\vec{AB}$*.

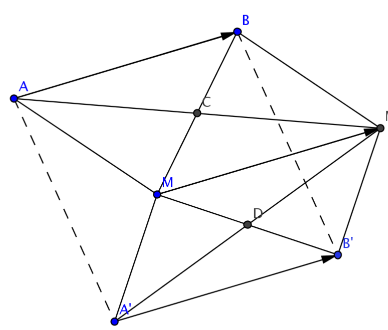


Propriété :

> M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{AB}$ si et seulement si $ABM'M$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Preuve :
Immédiat puisqu'un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

Remarques :
- L'image de A par la translation de vecteur $\vec{AB}$ est B.
- Soient A,B, A' et B' quatre points du plan. Alors la translation de vecteur $\vec{AB}$ et la translation de vecteur $\vec{A'B'}$ sont égales si tout point M du plan a la même image par la translation de vecteur $\vec{AB}$ et par la translation de vecteur $\vec{A'B'}$.



Propriété et définition :

Soient A,B, A' et B' quatre points du plan. Alors la translation de vecteur $\vec{AB}$ et la translation de vecteur $\vec{A'B'}$ sont égales si et seulement $ABB'A'$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). On dit alors que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ sont égaux et on écrit $\vec{AB} = \vec{A'B'}$. On notera aussi $\vec{u}$ le vecteur égal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$.

Preuve :

- Si les translations sont égales, alors tout point M a la même image par la translation de vecteur $\vec{AB}$ et par la translation de vecteur $\vec{A'B'}$. En particulier, le point A a pour image B par la translation de vecteur $\vec{AB}$ donc aussi par la translation de vecteur $\vec{A'B'}$ d'où $ABB'A'$ est un parallélogramme.
- Supposons réciproquement que $ABB'A'$ est un parallélogramme. Les droites (AB) et $(A'B')$ sont donc parallèles et les côtés AB et $A'B'$ sont égaux. Alors pour tout point M du plan, d'image M' par la translation de vecteur $\vec{AB}$, $MM'BA$ est un parallélogramme, c'est à dire que les côtés AB et MM' sont égaux et que les droites (AB) et (MM') sont parallèles. Les droites $(A'B')$ et (MM') sont donc parallèles et les segments $[A'B']$ et $[MM']$ ont même longueur. Le quadrilatère $A'B'M'M$ a donc deux côtés opposés parallèles et de même longueur, c'est donc un parallélogramme, ce qui montre que M' est aussi l'image de M par la translation de vecteur $\vec{A'B'}$. Ceci étant vrai pour tous les points M du plan, les deux translations sont donc égales.

Remarque :

Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ sont donc égaux si et seulement si les trois conditions suivantes sont vraies :

- les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles : ont dit qu'elles ont même *direction* ;
- le sens de A vers B est le même que de A' vers B' ;
- les segments $[AB]$ et $[A'B']$ ont même longueur.

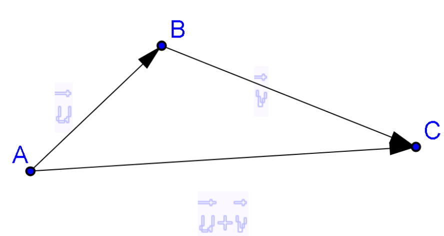
2 Somme de vecteurs

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$.
La *somme des vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, est le vecteur $\vec{AC}$.

Propriété (relation de CHASLES) :

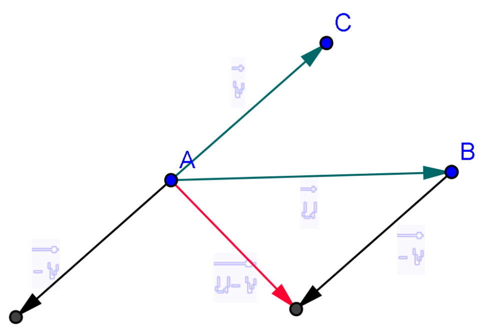
Pour tous les points A, B et C on a donc $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.



Définition :

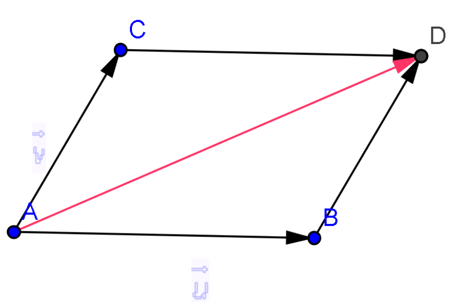
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$.

- On appelle *vecteur nul* le vecteur noté $\vec{0}$ et défini par $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{BB}$;
- on appelle *vecteur opposé* au vecteur $\vec{u}$, le vecteur noté $-\vec{u}$ tel que $-\vec{u} = \vec{BA}$;
- on appelle *différence* du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$ égale à $\vec{u} + (-\vec{v})$.



Règle du parallélogramme :

Soient A, B, C et D quatre points non alignés. $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.



Preuve :

- Si $ABDC$ est un parallélogramme, alors $\vec{AC} = \vec{BD}$ donc $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$.
- Si $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$, on a $\vec{BA} + \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{BA} + \vec{AD}$ donc $\vec{AC} = \vec{BA} + \vec{AD}$ et $\vec{AC} = \vec{BD}$ ce qui signifie que $ABDC$ est un parallélogramme.

3 Coordonnées de vecteurs

Définition :

Soient A et B deux points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Alors les coordonnées de $\vec{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Propriété :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère et soit $\vec{u}$ un vecteur. Alors pour tous les points A, B tels que $\vec{u} = \vec{AB}$, les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{AB}$ sont égales.

Algorithmique :

Algorithme de calcul des coordonnées $(xAB; yAB)$ du vecteur $\vec{AB}$ dont les points A et B ont pour coordonnées $(xA; yA)$ et $(xB; yB)$:

```
Demander xA,yA
Demander xB,yB
xB-xA -> xAB
yB-yA -> yAB
Afficher xAB, yAB
```

Propriétés :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(x; y)$ et $(x'; y')$.

- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$;
- $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$;

Preuve :

- Conséquence de la propriété précédente ;
- soient A et B sont deux points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$. Les coordonnées de $\vec{u}$ sont donc $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

  Or $\vec{BA} = -\vec{u}$ et a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$ qui sont opposées à celles de $\vec{u}$;
- Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$. D'après la relation de Chasles on peut écrire que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Or les alscisses de $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont respectivement $x_B - x_A$ et $x_C - x_B$. Leur somme est $x_B - x_A + x_C - x_B = x_C - x_A$ qui est l'abscisse de $\vec{AC}$. De même pour les ordonnées.

Algorithmique :

Algorithme de test de l'égalité de deux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ dont les coordonnées $(x1, y1)$ et $(x2; y2)$ sont données :

```
Demander x1, y1
Demander x2, y2
Si (x1=x2) et (y1=y2) alors
    Afficher "Les deux vecteurs sont égaux"
sinon
    Afficher "Les deux vecteurs ne sont pas égaux"
```