Produit d'un vecteur par un nombre, cours pour la classe de seconde

F.Gaudon

3 juillet 2009

Table des matières

1 Produit d'un vecteur par un nombre

Définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans ce repère. Soit k un nombre réel. On appelle *vecteur produit de $\vec{u}$ par k*, le vecteur de coordonnées

...

dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Propriétés :

Soient k, k' deux nombres réels et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs.

- $k\vec{u} + k'\vec{u} =$ ....
- $k(k'\vec{u}) =$ .....
- $k(\vec{u} + \vec{v}) =$ ....
- $k\vec{u} = 0$ si et seulement si ....

Preuve :
Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans $(O;\vec{i};\vec{j})$. Alors le vecteur $k\vec{u}$ a par définition pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$, le vecteur $k'\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} k'x \\ k'y \end{pmatrix}$, le vecteur $k\vec{u} + k'\vec{u}$ a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx + k'x \\ ky + k'y \end{pmatrix}$ ce qui s'écrit aussi $\begin{pmatrix} (k+k')x \\ (k+k')y \end{pmatrix}$. On reconnaît les coordonnées de $(k+k')\vec{u}$ ce qui démontre la première propriété. Les autres propriétés se démontrent de la même manière.

Exemple :
Soients $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$$\begin{aligned} 3(\vec{u} + 2\vec{v}) - 5\vec{u} + 3\vec{v} &= \text{.................} \\ &= \text{...........} \\ &= \text{...........} \end{aligned}$$

Exemples de placement de points vérifiant une égalité vectorielle :

- Soient A, B et C trois points. Soit M le point défini par : $\vec{AM} = 3\vec{BC} - 2\vec{AC}$. Exprimons $\vec{AM}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$:

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= \text{.......} \\ &= \text{.............} \\ &= \text{............} \\ &= \text{...........} \end{aligned}$$

- soient A et B deux points. Placement du point N tel que $\vec{AN} = 4\vec{BN}$.

$$\begin{aligned} \vec{AN} &= \text{.......} \\ \vec{AN} &= \text{.......} \\ \vec{AN} - 4\vec{AN} &= \text{..............} \\ -3\vec{AN} &= \text{..............} \\ \vec{AN} &= \text{................} \\ \vec{AN} &= \text{..............} \end{aligned}$$

2 Traduction vectorielle de propriétés géométriques

2.1 Milieux de segments

Propriété :

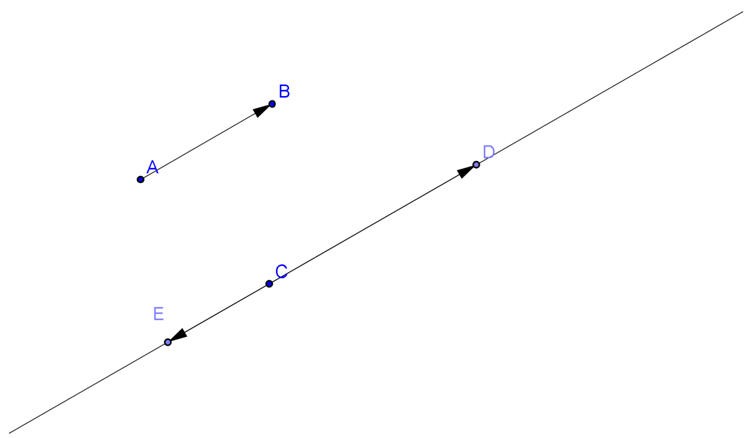
> Soients A, B et I trois points. I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si .... si et seulement si ....

Preuve :
Évident

2.2 Alignement et parallélisme

Définition :

Deux vecteurs non nuls sont *colinéaires* si ....

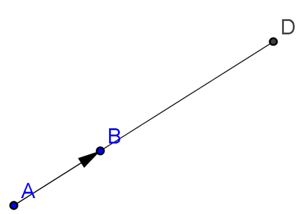


Propriété :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ....

Propriétés :

- Soient A, B et C trois points. A, B et C sont alignés et distincts si et seulement si il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$;
- Soient A, B, C et D quatre points. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.



Exemple (où l'on retrouve le théorème réciproque de THALÈS) :

Soit ABC un triangle. Soient M et N deux points tels que $\vec{AM} = k\vec{AB}$ et $\vec{AN} = k\vec{AC}$ où k est un nombre réel quelconque.

On a $\vec{MN} =$............ .... d'après la relation de CHASLES, donc $\vec{MN} =$................... .... d'où $\vec{MN} =$................ à nouveau d'après la relation de CHASLES. $\vec{MN}$ et $\vec{BC}$ sont donc colinéaires donc les droites (MN) et (BC) sont .... ce qui constitue une autre démonstration de la réciproque du théorème de THALÈS vue les années précédentes.