Produit d'un vecteur par un nombre, cours pour la classe de seconde

F.Gaudon

13 mai 2010

Table des matières

1 Produit d'un vecteur par un nombre

Définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans ce repère. Soit k un nombre réel. On appelle *vecteur produit de $\vec{u}$ par k*, le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Propriétés :

Soient k, k' deux nombres réels et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs.
- $k\vec{u} + k'\vec{u} = (k+k')\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $k\vec{u} = 0$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Preuve :
Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans $(O;\vec{i};\vec{j})$. Alors le vecteur $k\vec{u}$ a par définition pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$, le vecteur $k'\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} k'x \\ k'y \end{pmatrix}$, le vecteur $k\vec{u} + k'\vec{u}$ a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx + k'x \\ ky + k'y \end{pmatrix}$ ce qui s'écrit aussi $\begin{pmatrix} (k+k')x \\ (k+k')y \end{pmatrix}$. On reconnaît les coordonnées de $(k+k')\vec{u}$ ce qui démontre la première propriété. Les autres propriétés se démontrent de la même manière.

Exemple :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$$\begin{aligned} 3(\vec{u}+2\vec{v}) - 5\vec{u} + 3\vec{v} &= 3\vec{u} + 6\vec{v} - 5\vec{u} + 3\vec{v} \\ &= 3\vec{u} + 6\vec{v} - 5\vec{u} + 3\vec{v} \\ &= -2\vec{u} + 9\vec{v} \end{aligned}$$

Exemples de placement de points vérifiant une égalité vectorielle :
- Soient A, B et C trois points. Soit M le point défini par : $\vec{AM} = 3\vec{BC} - 2\vec{AC}$. Exprimons $\vec{AM}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$:

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= 3(\vec{BA} + \vec{AC}) - 2\vec{AC} \\ &= 3\vec{BA} + 3\vec{AC} - 2\vec{AC} \\ &= 3\vec{BA} + \vec{AC} \\ &= -3\vec{AB} + \vec{AC} \end{aligned}$$

- soient A et B deux points. Placement du point N tel que $\vec{AN} = 4\vec{BN}$.

$$\begin{aligned}
\vec{AN} &= 4(\vec{BA} + \vec{AN}) \text{ d'après la relation de CHASLES)}\\
\vec{AN} &= 4\vec{BA} + 4\vec{AN} \text{ d'après la propriété } k\vec{u} + k\vec{u'} = k(\vec{u} + \vec{u'})\\
\vec{AN} - 4\vec{AN} &= 4\vec{BA} + 4\vec{AN} - 4\vec{AN} \text{ en ajoutant l'opposé de } 4\vec{AN}\\
-3\vec{AN} &= 4\vec{BA} \text{ d'après la propriété } k\vec{u} + k'\vec{u} = (k+k')\vec{u}\\
\vec{AN} &= -\frac{4}{3}\vec{BA}\\
\vec{AN} &= \frac{4}{3}\vec{AB}
\end{aligned}$$

2 Traduction vectorielle de propriétés géométriques

2.1 Milieux de segments

Propriété :

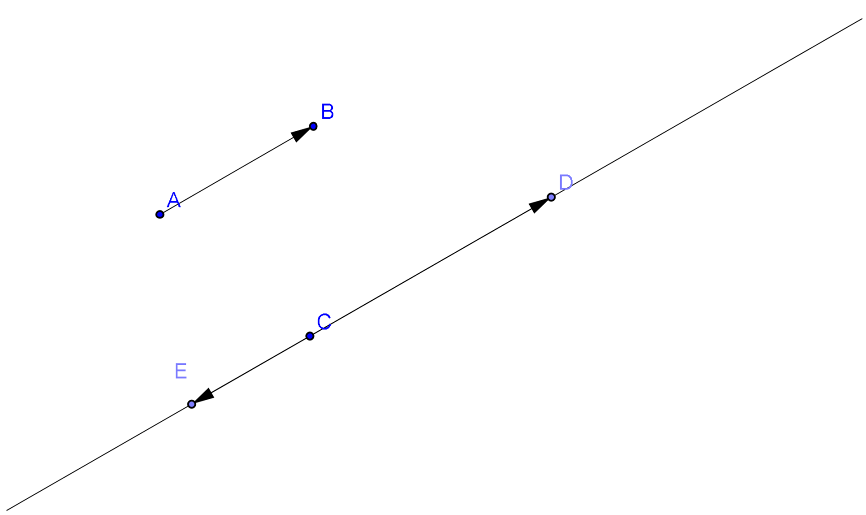
Soient A, B et I trois points. I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\vec{AI} = \vec{IB}$ si et seulement si $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

Preuve :
Immédiat

2.2 Alignement et parallélisme

Définition :

Deux vecteurs non nuls sont *colinéaires* si il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

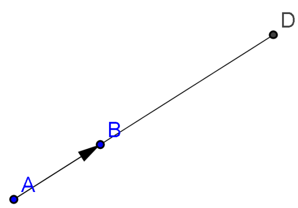


Remarque :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si ils ont la même direction.

Exemple :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -15 \\ 9 \end{pmatrix}$ dans un repère. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car $\vec{v} = -3\vec{u}$ ou $\vec{u} = -\frac{1}{3}\vec{v}$.

Propriétés :

- Soient A, B et C trois points. A, B et C sont alignés et distincts si et seulement si il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$;
- Soient A, B, C et D quatre points. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.



Exemple (où l'on retrouve le théorème réciproque de THALÈS) :
Soit ABC un triangle. Soient M et N deux points tels que $\vec{AM} = k\vec{AB}$ et $\vec{AN} = k\vec{AC}$ où k est un nombre réel quelconque.

On a $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN}$ d'après la relation de CHASLES, donc $\vec{MN} = -k\vec{AB} + k\vec{AC} = k(\vec{BA} + \vec{AC})$ d'où $\vec{MN} = k\vec{BC}$ à nouveau d'après la relation de CHASLES. $\vec{MN}$ et $\vec{BC}$ sont donc colinéaires donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles ce qui constitue une autre démonstration de la réciproque du théorème de THALÈS vue les années précédentes.

Propriété :

On suppose $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si les coordonnées des vecteurs sont proportionnelles c'est à dire si et seulement si $xy' = yx'$.

Preuve dans le cas où x,y,x' et y' sont non nuls :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} = k\vec{v}$ où k est un réel c'est à dire si et seulement si $x = kx'$ et $y = ky'$ c'est à dire $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = k$ ou encore si et seulement si les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles de coefficient de proportionnalité k.

Preuve dans le cas général :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, il existe k non nul tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Par conséquent, d'après les propriétés précédentes, $x = kx'$ et $y = ky'$ donc $xy' = x\frac{y}{k}$ et $yx' = y\frac{x}{k}$ d'où $xy' - yx' = 0$.

Réciproquement, si $xy' - x'y = 0$ alors $xy' = x'y$. Comme $\vec{u}$ est non nul, x ou y est non nul. Supposons x non nul (démonstration analogue dans l'autre cas), on a $y' = \frac{x'}{x}y$. En posant $k = \frac{x'}{x}$ on a $y' = ky$ et $x' = kx$ donc les deux vecteurs sont colinéaires.

Exemple :
Soient A et B les points de coordonnées $(1;3)$ et $(2;1)$ dans un repère. Soit $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées $(4;3)$. $\vec{AB}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(2-1;1-3)$ donc $(1;-2)$. On a $x_{\vec{AB}}y_{\vec{v}} = 1$ et $x_{\vec{v}}y_{\vec{AB}} = 3 \times 2 \neq 1$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Algorithmique :
Algorithme qui teste si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x_u; y_u)$ et $(x_v; y_v)$ sont colinéaires :

Données : x_u, y_u, x_v, y_v
Début traitement
  si $x_u y_v - x_v y_u = 0$ **alors**
    Afficher *Vecteurs colinéaires*
  sinon
    Afficher *Vecteurs non colinéaires*
  fin
Fin traitement.

Exemple :
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(xu; yu)$ et $(xv; yv)$. On notera $E = xu$, $F = yu$, $G = xv$ et $H = yv$ les variables sur TI et casio pour cause de limitations techniques dans le nommage des variables.

TI :	**Casio :**	**XCas :**

Prompt E,F,G, H
If $E*H-F*G=0$
Then
Disp "COLINEAIRES"
Else
Disp "NON COLINEAIREs"
End
	"E" :?→ E
	"F" :?→ F
	"G" :?→ G
	"H" :?→ H
	If $E*H-G*F=0$
	Then
	"COLINEAIRES"◢
	Else
	"NON COLINEAIRES"◢
	ifEnd
		`saisir("xA =",xA);`
		`saisir("yA =",yA);`
		`saisir("xB =",xB);`
		`saisir"(yB =",yB);`
		`if (xA*y_B-y_A*xB==0) faire`
		`  afficher("Colinéaires");`
		`sinon`
		`  afficher("Non colinéaires");`
		`fsi;`