Fonctions affines, classe de 2nde

F. Gaudon

http://mathsfg.net.free.fr

2 avril 2012

1. Étude des fonctions affines
2. Proportionnalité des accroissements

1. Étude des fonctions affines
2. Proportionnalité des accroissements

Définition :

Soient m et p deux nombres réels. On appelle fonction *affine* la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = mx + p$$

Remarque :

Si $p = 0$, f est définie par $f(x) = mx$ et est dite *linéaire*.

Variations :

- Si $m > 0$ alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$;
- si $m = 0$ alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$;
- si $m < 0$ alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

$m > 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

$m < 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$

Preuve :

- Si $m > 0$, il s'agit de montrer que si x augmente, alors $f(x)$ augmente, c'est à dire que si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$. Soient donc x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$. Alors $mx_1 < mx_2$ et $mx_1 + p < mx_2 + p$ c'est à dire $f(x_1) < f(x_2)$ donc f est croissante sur $]-\infty;+\infty[$;
- Si $m = 0$, pour tout x réel, $f(x) = p$ donc f est constante égale à p ;
- si $m < 0$, il s'agit de montrer que xi x augmente, alors $f(x)$ diminue, c'est à dire que si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$. Soient donc x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$. Alors on a $mx_1 > mx_2$ puis $mx_1 + p > mx_2 + p$ donc f est décroissante sur $]-\infty;+\infty[$.

Signe :

Si $m \neq 0$, les deux cas possibles sont résumés dans les tableaux de signe suivants :

si $m > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		-	0	+	

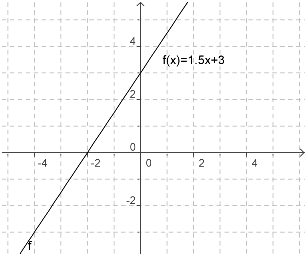
si $m < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		+	0	-	

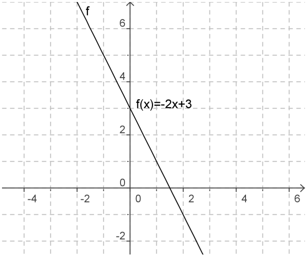
Preuve :
$f(x) > 0$ signifie $mx + p > 0$
c'est à dire $mx > -p$
ou encore si $m < 0$, $x < -\frac{p}{m}$
et, si $m > 0$, $x > -\frac{p}{m}$
d'où les tableaux de signe.

Représentation graphique :
La représentation graphique de toute fonction affine est une droite.

$m > 0$



$m < 0$



1 Étude des fonctions affines

2 Proportionnalité des accroissements

Propriété :

Soit une fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$ de représentation graphique (d) dans un repère du plan. Alors l'accroissement de la variable x est proportionnel à l'accroissement des images $f(x)$ et le coefficient de proportionnalité est le coefficient directeur m de la fonction affine c'est à dire que pour tous les points A et B de la droite (d) de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ avec $x_A \neq x_B$ on a :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

et

$$p = y_A - mx_A$$

Preuve :
On a $y_B - y_A = f(x_B) - f(x_A)$
donc $y_B - y_A = mx_B + p - (mx_A + p)$
d'où $y_B - y_A = mx_B - mx_A + b - b$
et $y_B - y_A = m(x_B - x_A)$.
D'où la proportionnalité et la première formule.
Par ailleurs, $A(x_A; y_A)$ appartient à la droite donc $y_A = mx_A + p$
d'où la deuxième formule.

Exemple 1 d'utilisation :

Soit f une fonction affine telle que $f(1) = 5$ et $f(3,5) = 15$.
f est affine donc de la forme $f(x) = mx + p$ pour tout x réel où m et p sont deux nombres réels à déterminer et $A(1;5)$ et $B(3,5;15)$ sont deux points de la droite représentant f.
On a $m = \frac{15-5}{3{,}5-1} = \frac{10}{2{,}5} = 4$
donc $f(x)$ s'écrit $f(x) = 4x + p$ pour tout réel x.
En outre on sait que $A(1;5)$ appartient à la droite donc $p = 5 - 4 \times 1 = 1$ (on aurait pu utiliser le point B).
Finalement, $f(x) = 4x + 1$.

Exemple 2 d'utilisation :
Soit f la fonction affine dont la droite $\mathcal{D}$ qui la représente dans un repère passe par le point A de coordonnées $(-2; -3)$ et dont le nombre m dans l'écriture $f(x) = mx + p$ vaut $m = 2$. Alors si on avance de 1 unité en abscisse (autrement dit si $x_B - x_A = 1$), pour retrouver un point de la droite $\mathcal{D}$ on doit augmenter de 2 en ordonnées pour retrouver un point B de la droite ($y_B - y_A = 2$).