Fonctions affines, cours, classe de 2nde

1 Étude des fonctions affines

Définition :

Soient a et b deux nombres réels. On appelle fonction *affine* la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

....

Remarque :
Si ...., f est dite *linéaire*.

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x + 4$ pour tout x réel. f est une fonction affine.
On a $f(6) =$..........
.... est donc l'image de .... par f.
Pour rechercher les antécédents de 6 par f on ....
c'est à dire .... donc .... donc .... et $x =$ ....
6 a donc un unique antécédent par f, il s'agit de ....

Variations :

- Si $a > 0$ alors la fonction f est .... sur $]-\infty; +\infty[$;
- si $a = 0$ alors la fonction f est .... sur $]-\infty; +\infty[$;
- si $a < 0$ alors la fonction f est .... sur $]-\infty; +\infty[$.

....

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	.....

.....

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	......

Preuve :
Soient x et x' deux nombres réels tels que $x \leq x'$.

- Si .... on a donc ax.......ax' et $ax + b$.....$ax' + b$ donc $f(x)$.......$f(x')$ c'est à dire f est .... sur $]-\infty; +\infty[$;
- Si .... on a donc $ax = ax' = 0$ et $ax + b = ax' + b = b$ donc $f(x)$.......$f(x')$ c'est à dire f est constante ;
- si .... on a donc ax.......ax' et $ax + b$.....$ax' + b$ donc $f(x)$.......$f(x')$ c'est à dire f est .... sur $]-\infty; +\infty[$.

Signe :

Si $a \neq 0$, les deux cas possibles sont résumés dans les tableaux de signe suivants :

si $a > 0$:

x	$-\infty$ .... $+\infty$
signe de $ax+b$	... ...

si $a < 0$:

x	$-\infty$ .... $+\infty$
signe de $ax+b$	... ...

Preuve :

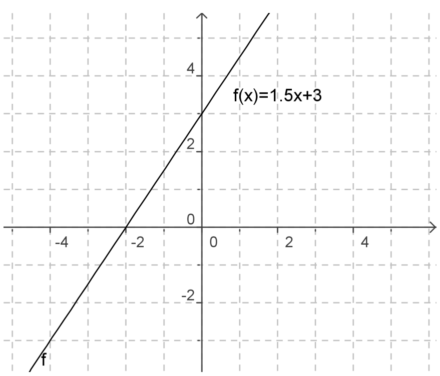
$f(x) > 0$ signifie $ax + b > 0$ c'est à dire .... ou encore si $a < 0$, ... et, si $a > 0$, ... d'où les tableaux de signe.

Représentation graphique :

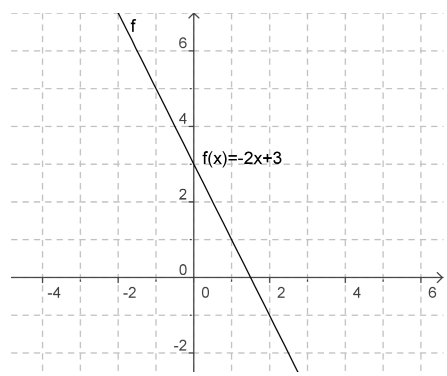
Propriété :

> La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère est .... Si la fonction est linéaire, ...

$a > 0$



$a < 0$

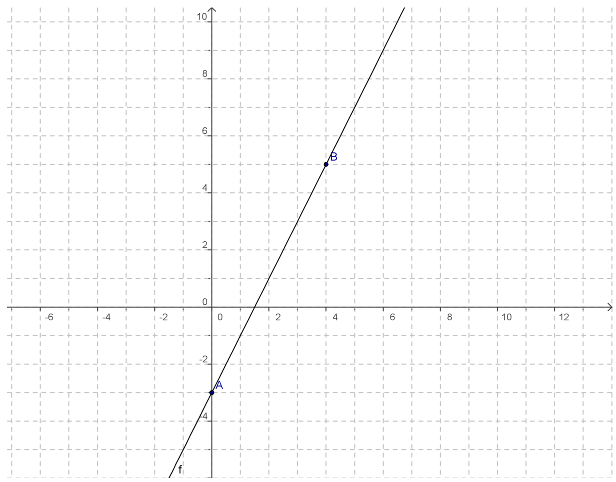


Exemple :

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 2x - 3$ pour tout x réel. On construit un tableau de valeurs pour deux valeurs de x au choix, 0 et 4 par exemple :

x	0	4
$f(x)$	.....	......

car $f(0) =$ .... et $f(4) =$ .... La représentation graphique de la fonction f est donc .... passant par les points A et B de coordonnées .... et ....



2 Proportionnalité des accroissements

Propriété :

Pour toute fonction affine f telle que $f(x) = ax + b$, l'accroissement de la variable x est proportionnel à l'accroissement des images $f(x)$ et le coefficient de proportionnalité est le coefficient directeur a de la fonction affine. C'est à dire,

$$a = \ldots\ldots\ldots$$

pour tous les réels x_1 et x_2 avec $x_1 \neq x_2$.

Preuve :
Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 \neq x_2$.

On a $f(x_1) - f(x_2) = \ldots\ldots$

D'où la proportionnalité et la formule.

Exemple d'utilisation :
Soit f une fonction affine telle que $f(1) = 5$ et $f(3,5) = 15$. f est affine donc de la forme .... pour tout x réel où a et b sont deux nombres réels fixés.

On $a = \ldots\ldots$
donc $f(x)$ s'écrit $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ pour tout réel x.
En outre on sait que $f(1) = \ldots\ldots$ donc .... (on aurait tout aussi bien pu utiliser $f(3,5) = 15$) d'où .... donc $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété :

Soit f une fonction affine, donc définie par $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux nombres réels. Soit $\mathcal{D}$ la droite qui représente la fonction f dans un repère. Pour tout point A de coordonnées $(x_A; y_A)$ et tout point B de coordonnées $(x_B; y_B)$ appartenant à la droite $\mathcal{D}$ avec $x_A \neq x_B$, on a :

$$a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Preuve :
Il suffit de remarquer que $A(x_A; y_A)$ appartient à la droite implique que $f(x_A) = y_A$ et donc aussi que $f(x_B) = y_B$) pour utiliser la propriété précédente avec $x_A = x_1$ et $x_B = x_2$.

Exemple d'utilisation :
Soit f la fonction affine dont la droite $\mathcal{D}$ qui la représente dans un repère passe par le point A de coordonnées $(-2; -3)$ et dont le nombre a dans l'écriture $f(x) = ax + b$ vaut $a = 2$.
Alors si on avance de ...... unité en abscisse (autrement dit si $x_B - x_A = ...$), pour retrouver un point de la droite $\mathcal{D}$ on doit augmenter de ...... en ordonnées pour retrouver un point B de la droite (c'est à dire $y_B - y_A = ...$).