Fonctions affines, classe de seconde

F.Gaudon

17 décembre 2009

Table des matières

1 Étude des fonctions affines **2**

2 Proportionnalité des accroissements **3**

1 Étude des fonctions affines

Définition :

Soient a et b deux nombres réels. On appelle fonction *affine* la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b$$

Remarque :

Si $b = 0$, f est définie par $f(x) = ax$ et est dite *linéaire*.

Variations :

- Si $a > 0$ alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$;
- si $a = 0$ alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$;
- si $a < 0$ alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

$a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

$a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

Preuve :

Soient u et v deux nombres réels tels que $u \leq v$.

- Si $a > 0$ alors $au \leq av$ et $au + b \leq av + b$ c'est à dire $f(u) \leq f(v)$ donc f est croissante sur $]-\infty; +\infty[$;
- Si $a = 0$ on a donc $au = av = 0$ et $au + b = av + b = b$ donc f est constante égale à b ;
- si $a < 0$ on a $au \geq av$ puis $au + b \geq av + b$ donc f est décroissante sur $]-\infty; +\infty[$.

Signe :

Si $a \neq 0$, les deux cas possibles sont résumés dans les tableaux de signe suivants :

si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax + b$		-	0	+	

si $a < 0$:

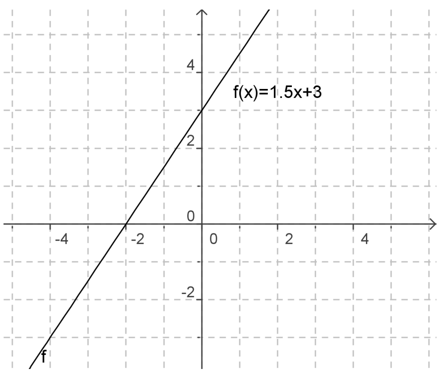
x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax + b$		+	0	-	

Preuve :

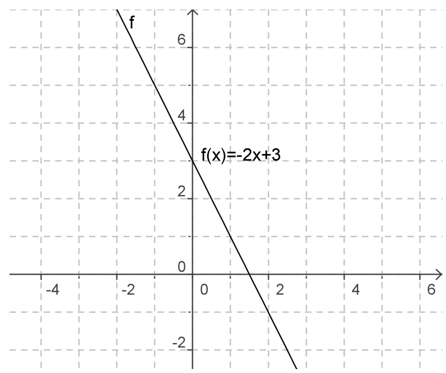
$f(x) > 0$ signifie $ax + b > 0$ c'est à dire $ax > -b$ ou encore si $a < 0$, $x < -\frac{b}{a}$ et, si $a > 0$, $x > -\frac{b}{a}$ d'où les tableaux de signe.

Représentation graphique :
La représentation graphique de toute fonction affine est une droite.

$a > 0$



$a < 0$



2 Proportionnalité des accroissements

Propriété :

> Pour toute fonction affine f telle que $f(x) = ax + b$, l'accroissement de la variable x est proportionnel à l'accroissement des images $f(x)$ et le coefficient de proportionnalité est le coefficient directeur a de la fonction affine. C'est à dire,
> $$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
> pour tous les réels x_1 et x_2 avec $x_1 \neq x_2$.

Preuve :
Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 \neq x_2$.
On a $f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - (ax_2 + b) = ax_1 - ax_2 + b - b = a(x_1 - x_2)$.
D'où la proportionnalité et la formule.

Exemple d'utilisation :
Soit f une fonction affine telle que $f(1) = 5$ et $f(3,5) = 15$. f est affine donc de la forme $f(x) = ax + b$ pour tout x réel où a et b sont deux nombres réels fixés.
On a $= \frac{f(1)-f(3,5)}{1-3,5} = \frac{5-15}{-2,5} = \frac{-10}{-2,5} = 4$ donc $f(x)$ s'écrit $f(x) = 4x + b$ pour tout réel x. En outre on sait que $f(1) = 5$ donc $4 \times 1 + b = 5$ (on aurait tout aussi bien pu utiliser $f(3,5) = 15$) d'où $b = 5 - 4 = 1$ donc $f(x) = 4x + 1$.

Propriété :

Soit f une fonction affine, donc définie par $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux nombres réels. Soit $\mathcal{D}$ la droite qui représente la fonction f dans un repère. Pour tout point A de coordonnées $(x_A; y_A)$ et tout point B de coordonnées $(x_B; y_B)$ appartenant à la droite $\mathcal{D}$ avec $x_A \neq x_B$, on a :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Preuve :
Il suffit de remarquer que $A(x_A; y_A)$ appartient à la droite implique que $f(x_A) = y_A$ et donc aussi que $f(x_B) = y_B$) pour utiliser la propriété précédente avec $x_A = x_1$ et $x_B = x_2$.

Exemple d'utilisation :
Soit f la fonction affine dont la droite $\mathcal{D}$ qui la représente dans un repère passe par le point A de coordonnées $(-2; -3)$ et dont le nombre a dans l'écriture $f(x) = ax+b$ vaut $a = 2$. Alors si on avance de 1 unité en abscisse (autrement dit si $x_B - x_A = 1$), pour retrouver un point de la droite $\mathcal{D}$ on doit augmenter de 2 en ordonnées pour retrouver un point B de la droite $(y_B - y_A = 2)$.